Skalarfelt og kvantefluktuasjoner

I forrige sett av notater regnet vi ut kvantefluktuasjonene i tensorperturbasjonen h. Skalarfeltet ϕ spilte da bare en passiv rolle ved å drive universets ekspansjon. Nå skal vi regne på kvantefluktuasjonene i skalarfeltet. Da oppstår en komplikasjon ved at disse fluktuasjonene fungerer som kilde til de skalare perturbasjonene i metrikken, Ψ og Φ. Vi må finne ut hvordan vi skal håndtere denne situasjonen. Strategien vår vil være:

- Sette opp ligningen som beskriver tidsutviklingen av en Fouriermode av skalarfeltperturbasjon $\delta\phi$. Vi tar hensyn til at Φ og Ψ kan være forskjellige fra null.
- Vise at Ψ og Φ er neglisjerbare for de tidsrommene vi er interesserte i.
- Finne en bevart størrelse som inneholder både $\delta\phi$ og Ψ. Vise at i inflasjonsfasen er denne proporsjonal med $\delta\phi$, mens den etter inflasjon er proporsjonal med Ψ.
- Regne ut fluktuasjonene $\delta\phi$, oversette disse til fluktuasjoner i Ψ etter inflasjon.

Bevegelsesligning for skalarfeltperturbasjoner

Bevegelsesligningen for det uperturberte skalarfeltet fant vi fra $\nu = 0$-komponenten av $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$. Nå bruker vi denne betingelsen igjen, men med den perturberte energi-impulstensoren. Husk at vi bare skal regne til første orden i perturbasjonene. Ligningen vi tar utgangspunkt i er

$$T^{\mu}_{0,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}T^{\alpha}_{0} - \Gamma^{\alpha}_{0\mu}T^{\mu}_{\alpha} = 0.$$

Vi vil i det følgende også benytte oss av at $\Phi \approx -\Psi$, som vi fant i diskusjonen av initialbetingelsene. Tidligere regnet vi ut Christoffelsymbolene, og for klarhetens skyld gjengir jeg resultatene her (i Fourierrommet):

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0}_{00} &= \Psi_{,0} \\
\Gamma^{0}_{0i} &= \Gamma^{0}_{i0} = ik_i\Psi \\
\Gamma^{0}_{ij} &= \delta_{ij}a^2(H + -4H\Psi - \Psi_{,0}) \\
\Gamma^{i}_{00} &= \frac{ik^i}{a^2}\Psi \\
\Gamma^{i}_{j0} &= \Gamma^{i}_{0j} = \delta_{ij}(H - \Psi_{,0}) \\
\Gamma^{i}_{jk} &= -i\Psi(\delta_{ij}k_k + \delta_{ik}k_j - \delta_{jk}k_i).
\end{aligned}$$

Vi skriver ut ligningen i litt mer detalj:

$$\delta T^{0}_{0,0} + ik_i\delta T^{i}_{0} + \Gamma^{\mu}_{0\mu}T^{0}_{0} + \Gamma^{\mu}_{i\mu}T^{i}_{0} - \Gamma^{0}_{0\mu}T^{\mu}_{0} - \Gamma^{i}_{0\mu}T^{\mu}_{i} = 0.$$

Ledd for ledd finner vi:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{0\mu}T^{0}_{0} &= (\Gamma^{0}_{00}+\Gamma^{i}_{0i})T^{0}_{0} = [\Psi_{,0}+\sum_{i}\delta_{ii}(H-\Psi_{,0})]T^{0}_{0} \\ &= (\Psi_{,0}+3H-3\Psi_{,0} = -2\Psi_{,0}+3H.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{i\mu}T^{i}_{0} &= (\Gamma^{0}_{i0}+\sum_{j}\Gamma^{j}_{ij})T^{i}_{0} = [ik_i\Psi+\sum_{j}(-i\Psi)(\delta_{ji}k_j+\delta_{jj}k_i-\delta_{ij}k_j)]T^{i}_{0} \\ &= (ik_i\Psi-3ik_i\Psi)T^{i}_{0} = -2ik_i\Psi T^{i}_{0}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\Gamma^{0}_{0\mu}T^{\mu}_{0} &= -\Gamma^{0}_{00}T^{0}_{0}-\Gamma^{0}_{0i}T^{i}_{0} \\ &= -\Psi_{,0}T^{0}_{0}-ik_i\Psi T^{i}_{0}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\Gamma^{i}_{0\mu}T^{\mu}_{i} &= -\Gamma^{i}_{00}T^{0}_{i}-\Gamma^{i}_{0j}T^{j}_{i} \\ &= -\frac{ik^i}{a^2}\Psi T^{0}_{i}-\sum_{ij}\delta_{ij}(H-\Psi_{,0})T^{j}_{i} \\ &= -\frac{ik^i}{a^2}\Psi T^{0}_{i}-(H-\Psi_{,0})T^{i}_{i}.\end{aligned}$$

Siden vi bare skal regne til første orden, må vi sette inn nullteordensutrykket for energi-impulstensoren i alle ledd der det forekommer en faktor Ψ. Det gir oss

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial\delta T^{0}_{0}}{\partial t}+ik_i\delta T^{i}_{0}+3H\delta T^{0}_{0}-2\Psi_{,0}T^{(0)0}_{0} \\ &- 2ik_i\Psi T^{(0)i}_{0}-\Psi_{,0}T^{(0)0}_{0}-ik_i\Psi T^{(0)i}_{0} \\ &- \frac{ik^i}{a^2}\Psi T^{(0)}_{i}-H\delta T^{i}_{i}+\Psi^{(0)i}_{i}.\end{aligned}$$

Nå er

$$T^{(0)0}_{i} = g^{0\nu}\Psi^{(0)}_{,\nu}\Psi^{(0)}_{,i} = 0,$$

siden $\psi^{(0)}$ bare er en funksjon av tiden, og

$$T^{(0)i}_{0} = -g^{i}_{0}g^{0}_{0}(\psi^{(0)}_{,0})^2+g^{i}_{0}\left[\frac{1}{2}(\phi^{(0)}_{,0})^2-V(\phi^{(0)})\right] = 0,$$

siden $g^{i}_{0}=0$. Dermed forenkler ligningen seg til

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta T^{0}_{0}+ik_i\delta T^{i}_{0}+3H\delta T^{0}_{0}-H\delta T^{i}_{i} = 3\Psi_{,0}T^{(0)0}_{0}-\Psi_{,0}T^{(0)i}_{i}.$$

Siden $T^{(0)\mu}_{\nu}$ er energi-impulstensoren for en perfekt væske har vi at $T^{(0)0}_{0}=-\rho$ og $T^{(0)i}_{i}=\sum_i T^{(0)i}_{i}=\sum_i p = 3p$. Dermed:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta T^{0}_{0}+ik_i\delta T^{i}_{0}+3H\delta T^{0}_{0}-H\delta T^{i}_{i} = -3(\rho+p)\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Nå ville det være veldig praktisk om vi kunne se bort i fra Ψ. Hvis vi skal kunne gjøre det, så må høyresiden være mindre enn hvert enkelt ledd på venstresiden. Og slik er det faktisk. Vi kan vise det for det første leddet på høyresiden. Altså: min påstand er at

$$\Psi \ll \frac{\delta T_0^0}{p+\rho}.$$

La oss ta utgangspunkt i en ligning vi utledet tidligere:

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} - \Psi\frac{\dot{a}}{a}\right) = -4\pi G a^2 \delta T_0^0.$$

Vi setter inn $\dot{a}/a = aH$ og $\Phi = -\Psi$. Det gir

$$k^2\Psi + 3aH(\dot{\Psi} + aH\Psi) = 4\pi G a^2 \delta T_0^0.$$

Moder som er i ferd med å krysse horisonten er spesielt interessante, fordi etter at de har gjort det kan ikke kausale prosesser påvirke dem. For slike moder gjelder $k \sim aH$, og da er $k^2\Psi \sim a^2H^2\Psi$. For at ligningen over skal være oppfylt må vi da ha at

$$a^2H^2\Psi \sim Ga^2\delta T_0^0,$$

dvs.

$$\Psi \sim \frac{G\delta T_0^0}{H^2}.$$

Men fra Friedmannligningene har vi at $H^2 \sim G\rho$, så

$$\Psi \sim \frac{\delta T_0^0}{\rho} = \frac{p+\rho}{\rho}\left(\frac{\delta T_0^0}{p+\rho}\right).$$

Dodelson innfører slow-roll-parameteren ϵ ved

$$\epsilon = \frac{d}{dt}\frac{1}{H} = -\frac{\dot{H}}{aH^2},$$

og denne er liten mens inflasjon pågår. Nå har vi at

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{1}{H} &= -\frac{1}{H^2}\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{H^2}\left[-\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2}\right] \\
&= -\frac{3}{8\pi G\rho}\left[-\frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho+3p)\right] \\
&= 1 + \frac{1}{2\rho}(\rho+3p) = \frac{3(\rho+p)}{2\rho},
\end{aligned}$$

der jeg har brukt Friedmannligningene flittig. Dette gir oss at

$$\frac{\rho+p}{\rho} = \frac{2}{3}\epsilon,$$

og dermed

$$\Psi \sim \epsilon \left(\frac{\delta T^0_0}{p+\rho} \right) \ll \frac{\delta T^0_0}{p+\rho},$$

fordi $\epsilon \ll 1$, ihvertfall så lenge inflasjon pågår. Tilsvarende kan man vise at høyresiden er neglisjerbar i forhold til de øvrige leddene på venstresiden (merk at dette ikke ligger noen politiske føringer på denne fremgangsmåten. Du kan godt skrive opp ligningen speilvendt og vise at leddene på høyresiden dominerer venstresiden, dersom du føler deg mer komfortabel med det.)

Det som gjenstår nå er å regne ut førsteordensperturbasjonen i energi-impulstensoren når vi har $\phi(\vec{x}, t) = \phi^{(0)}(t) + \delta\phi(\vec{x}, t)$. Vi finner at

$$\begin{aligned} T^i_0 &= g^{i\nu}\phi_{,\nu}\phi_{,0} - g^i_0 \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + V(\phi) \right] \\ &= \frac{1}{a^2}\delta_{i\nu}\phi_{,\nu}\phi_{,0} = \frac{1}{a^2}\phi_{,i}\phi_{,0} \\ &= \frac{1}{a^3}\delta\phi_{,i}\dot{\phi^{(0)}} \to \frac{ik^i}{a^3}\dot{\phi^{(0)}}\delta\phi, \end{aligned}$$

der jeg i siste overgang har gått over i Fourierrommet. Videre:

$$\begin{aligned} T^0_0 &= g^{0\nu}\phi_{,\nu}\phi_{,0} - g^0_0 \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + V(\phi) \right] \\ &= -(\phi_{,0})^2 - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - V(\phi) \\ &= -(\phi_{,0})^2 + \frac{1}{2}(\phi_{,0})^2 - \frac{1}{2a^2}\phi_{,i}\phi_{,i} - V(\phi) \\ &= -\frac{1}{2}(\phi^{(0)}_{,0} + \delta\phi_{,0})^2 - \frac{1}{2a^2}\delta\phi_{,i}\delta\phi_{,i} - V(\phi^{(0)} + \delta\phi) \\ &= -\frac{1}{2}(\phi^{(0)}_{,0})^2 - \phi^{(0)}_{,0}\delta\phi_{,0} - V(\phi^{(0)}) - V'(\phi^{(0)})\delta\phi \\ &= -\frac{1}{2}(\phi^{(0)}_{,0})^2 - V(\phi^{(0)}) - \phi^{(0)}_{,0}\delta\phi_{,0} - V'\delta\phi, \end{aligned}$$

slik at

$$\delta T^0_0 = -\phi^{(0)}_{,0}\delta\phi_{,0} - V'\delta\phi = -\frac{\dot{\phi^{(0)}}\dot{\delta\phi}}{a^2} - V'\delta\phi.$$

Til slutt:

$$\begin{aligned} T^i_j &= g^{i\nu}\phi_{,\nu}\phi_{,j} - g^i_j \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + V(\phi) \right] \\ &= g^{ii}\phi_{,i}\phi_{,j} - g^i_j \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + V(\phi) \right]. \end{aligned}$$

Det første leddet ser vi vil være av andre orden i perturbasjonene. Dessuten er $g^i_j = \delta_{ij}$, så

$$T^i_j = -\delta_{ij} \left[-\frac{1}{2}\phi_{,0}\phi_{,0} + \frac{1}{2a^2}\phi_{,i}\phi_{,i} + V(\phi) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= -\delta_{ij}\left[-\frac{1}{2}(\phi^{(0)}_{,0})^2 - \phi^{(0)}_{,0}\delta\phi^{(0)}_{,0} + V(\phi^{(0)}) + V'\delta\phi\right] \\
&= \delta_{ij}\left[\frac{1}{2}(\phi^{(0)}_{,0})^2 - V\right] + \delta_{ij}(\phi^{(0)}_{,0}\delta\phi_{,0} - V'\delta\phi),
\end{aligned}
$$

slik at

$$
\delta T^i_j = \delta_{ij}[\phi^{(0)}_{,0}\delta\phi_{,0} - V'\delta\phi] = \delta_{ij}\left(\frac{\dot{\phi^{(0)}}\dot{\delta\phi}}{a^2} - V'\delta\phi\right).
$$

Da blir ligningen vår

$$
\left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\eta} + 3H\right)\left(-\frac{\dot{\phi^{(0)}}\dot{\delta\phi}}{a^2} - V'\delta\phi\right) + ik^i\frac{ik^i}{a^3}\dot{\phi^{(0)}}\delta\phi - H\sum_i \delta_{ij}\left(\frac{\dot{\phi^{(0)}}\dot{\delta\phi}}{a^2} - V'\delta\phi\right) = 0.
$$

Vi skriver ut alle leddene:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{\ddot{\phi}\dot{\delta\phi}}{a^3} - \frac{\dot{\phi}\ddot{\delta\phi}}{a^3} + 2\frac{\dot{a}}{a^4}\dot{\phi}\dot{\delta\phi} - \frac{1}{a}V''\dot{\phi}\delta\phi - \frac{1}{a}V'\dot{\delta\phi} \\
&- 3H\frac{\dot{\phi}\dot{\delta\phi}}{a^2} - 3HV'\delta\phi - \frac{k^2}{a^3}\dot{\phi}\delta\phi \\
&- 3H\frac{\dot{\phi}\dot{\delta\phi}}{a^2} + 3HV',\delta\phi
\end{aligned}
$$

og etter multiplikasjon med a^3 gir dette

$$
\begin{aligned}
0 &= -\ddot{\phi}\dot{\delta\phi} - \dot{\phi}\ddot{\delta\phi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}\dot{\delta\phi} - a^2V''\dot{\phi}\delta\phi - a^2V'\dot{\delta\phi} \\
&- 3aH\dot{\phi}\dot{\delta\phi} - k^2\dot{\phi}\delta\phi - 3aH\dot{\phi}\dot{\delta\phi},
\end{aligned}
$$

eller (bruker $\dot{a}/a = aH$

$$
\dot{\phi}\ddot{\delta\phi} + \dot{\delta\phi}(-\ddot{\phi} - 4aH\dot{\phi} - a^2V') + \delta\phi(-a^2V''\dot{\phi} - k^2\dot{\phi}) = 0.
$$

Man kan vise at dersom slow-roll-betingelsene er oppfylt, så er $a^2V'' \ll k^2$, så dette leddet kan neglisjeres. Videre har vi fra nullteordensligningen at

$$
\ddot{\phi} + 2aH\dot{\phi} + a^2V' = 0,
$$

som gir

$$
-\ddot{\phi} - 4aH\dot{\phi} - a^2V' = -2aH\dot{\phi},
$$

og dermed får vi at

$$
-\dot{\phi}\delta\ddot{\phi} - 2aH\dot{\phi}\delta\dot{\phi} - k^2\dot{\phi}\delta\phi = 0,
$$

og endelig

$$
\delta\ddot{\phi} + 2aH\delta\dot{\phi} + k^2\delta\phi = 0.
$$

Som en test på din helse kan du sammenligne denne ligningen med ligningen for tensorperturbasjonene:

$$
\ddot{h} + 2aH\dot{h} + k^2h = 0.
$$

Dersom du ikke ser at disse ligningene er identiske, bør du oppsøke lege. At de er identiske betyr at kvantiseringen og beregningen av styrkespekteret blir nøyaktig maken. Den eneste forskjellen er normaliseringen av h, som gir en faktor $16\pi G$ i forskjell. Dermed får vi

$$P_\delta \phi = \frac{H^2}{2k^3}.$$

Nå har vi vist at gravitasjonspotensialet $\Psi = -\Phi$ er neglisjerbart i inflasjonsfasen. Dette har vi så brukt til å beregne spekteret av kvantefluktuasjoner i skalarfeltet ϕ. Men vi er ennå ikke helt i mål, for vi må finne ut hva som skjer med disse fluktuasjonene når inflasjonsfasen er over. Dersom fluktuasjonene også blir borte er vi ikke kommet noe lenger i vårt forsøk på å generere initialbetingelsene for tetthetsfluktuasjoner og temperaturanisotropier. Heldigvis er ikke verden så slem.

Helt umotivert innfører vi nå størrelsen

$$\zeta = -\frac{ik_i \delta T_i^0 H}{k^2(\rho + p)} - \Psi.$$

For moder som er innenfor horisonten eller akkurat har forlatt den er Ψ neglisjerbar. Videre er

$$\rho + p = (\dot{\phi^{(0)}}_{,0})^2 = \frac{\dot{\phi}^{(0)}}{a^2},$$

og

$$\begin{aligned}
T_i^0 &= g^{0\nu}\phi_{,\nu}\phi_{,i} - g_i^0 \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + V(\phi)\right] \\
&= g^{00}\phi_{,0}^{(0)} ik_i \delta\phi = -\frac{\dot{\phi^{(0)}} ik_i \delta\phi}{a}.
\end{aligned}$$

Da får vi at

$$\begin{aligned}
\zeta &= -\frac{ik_i \left(-\frac{\dot{\phi}^{(0)} ik_i \delta\phi}{a}\right) H}{k^2 \left(\frac{\dot{\phi}^{(0)}}{a}\right)^2} \\
&= -\frac{ak^2 \dot{\phi}^{(0)} \delta\phi H}{(k\dot{\phi}^{(0)})^2} \\
&= -\frac{aH\delta\phi}{\dot{\phi}^{(0)}}.
\end{aligned}$$

Med andre ord: rundt tiden da en mode med bølgetall k krysser horisonten er ζ bestemt av skalarfeltet ϕ. To spørsmål gjenstår: hva skjer med ζ etter inflasjon, og hvorfor skylle vi bry oss om det? For å få til den riktige dramatiske stigningen begynner jeg med det første spørsmålet. Vi befinner oss i epoken da inflasjon nettopp var unnagjort. Universet var da strålingsdominert, og energi-impulstensoren var da dominert av fotonene. Vi har da at

$$T^\mu_\nu = 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{P^\mu P_\nu}{P^0} f(\vec{x},\vec{p},t),$$

der jeg tidligere har vist at vi kan bruke de uperturberte uttrykkene for alle de kinematiske størrelsene som inngår. Da har vi at

$$\begin{aligned} T^0_i &= 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{P^0 P_i}{P^0} f \\ &= 2a\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p\hat{p}_i f. \end{aligned}$$

Vi husker at den perturberte fordelingsfunksjonen for fotonene er

$$f = f^{(0)} - p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta.$$

Førsteordensperturbasjonen til energi-impulstensoren blir da

$$\delta T^0_i = -2a\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p\hat{p}_i p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta,$$

og da får vi at

$$\begin{aligned} ik_i\delta T^0_i &= -2aki(2\pi)\int d\mu \hat{k}_i\hat{p}_i\Theta\int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}p^4 \\ &= -4\pi ak\frac{1}{(-i)}2\int\frac{d\mu}{2}\mu\Theta\left\{[p^4 f^{(0)}]_0^\infty - 4\int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3}p^3 f^{(0)}\right\} \\ &= -8\pi ak\Theta_1(-4)\int_0^\infty \frac{dpp^2}{(2\pi)^3}pf^{(0)} \\ &= 4ak\Theta_1\cdot 2\cdot 4\pi\int_0^\infty \frac{dpp^2}{(2\pi)^3}pf^{(0)} \\ &= 4ak\Theta_1\cdot 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}pf^{(0)} \\ &= 4ak\rho_r\Theta_1. \end{aligned}$$

Samtidig er $\rho + p = 4\rho_r/3$, så

$$\zeta = -\frac{4ak\rho_r\Theta_1 H}{\frac{4}{3}\rho_r k^2} - \Psi = -\frac{3aH\Theta_1}{k} - \Psi.$$

For å komme helt i mål, må vi relatere dipolen til Ψ. La oss se på ligningene for hastighetene v og v_b:

$$\begin{aligned} \dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v &= -ik\Psi \\ \dot{v}_b + \frac{\dot{a}}{a}v_b &= -ik\Psi + \frac{\dot{\tau}}{R}[v_b + 3i\Theta_1]. \end{aligned}$$

Under diskusjonen av initialbetingelser fant vi at Φ og Ψ til å begynne med er konstante. Videre er vi i den strålingsdominerte fasen der $a \propto \eta$ og $\dot{a}/a = 1/\eta = aH$. Da får vi at

$$\dot{v} + \frac{1}{\eta} v = -ik\Psi = \text{konstant},$$

dvs.

$$\eta\dot{v} + v = \frac{d}{d\eta}(\eta v) = -ik\Psi.$$

For $\eta = 0$ bør vi ha $v = 0$, og siden Ψ er konstant kan vi lett integrere opp denne ligningen:

$$\eta v == -\frac{ik\Psi}{2}\eta^2,$$

slik at

$$v = -\frac{ik\Psi}{2}\eta = -\frac{ik\Psi}{2aH}.$$

I de tidligste fasene spres fotonene hyppig på baryonene, og da er $\dot{\tau}$ stor. Til å begynne med vil derfor leddet proporsjonalt med $\dot{\tau}$ dominere i ligningen for v_b. Det vil føre til at v_b øker raskt til å begynne med, men bare inntil uttrykket i parentesen etter $\dot{\tau}/R$ blir lik null. Da er $v_b = -3i\Theta_1$, og når dette har skjedd vil v_b følge samme ligning som v. Vi har derfor at $v = v_b = -3i\Theta_1$, og følgelig

$$\Theta_1 = \frac{k\Psi}{6aH}.$$

Det gir endelig

$$\zeta = -\frac{3aH}{k}\frac{k}{6aH}\Psi - \Psi = -\frac{3}{2}\Psi.$$

Dermed har vi vist at $\zeta = -aH\delta\phi/\dot{\phi}^{(0)}$ for en mode som er i ferd med å krysse horisonten i inflasjonsfasen, og at $\zeta = -3\Psi/2$ etter inflasjon. Dersom vi nå kan vise at ζ er en bevart størrelse, dvs. at den har samme verdi før og etter inflasjon, så kan vi relatere $\Psi = -\Phi$ til skalarfeltfluktuasjonene $\delta\phi$.

Å vise at ζ er bevart innebærer litt arbeid, men det er vi jo vant til. Vi starter med ligningen vi utledet tidligere:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta T^0_0 + ik_i\delta T^i_0 + 3H\delta T^0_0 - H\delta T^i_i = -3(p+\rho)\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Det er først og fremst store moder (dvs moder der $k/aH \ll 1$) vi er interesserte i. Ser vi først på

$$\delta T^i_0 = \frac{ik^i}{a^3}\dot{\phi}\delta\phi,$$

så har vi at

$$ik_i\delta T^i_0 = -\frac{k^2}{a^3}\dot{\phi}\delta\phi \propto k^2,$$

og da kan dette leddet neglisjeres. Dermed blir ligningen

$$\frac{\partial\delta T^0_0}{\partial t} + 3H\delta T^0_0 - H\delta T^i_i = -3(p+\rho)\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Vi må få inn ζ på en eller annen måte, og det kan vi gjøre ved å relatere den til Ψ. Vi fant tidligere at $\zeta = -3\Psi/2$ etter inflasjon, men nå trenger vi imidlertid et uttrykk som er gyldig for alle tider siden vi skal vise at ζ er bevart. Vi får imidlertid lov til å anta at vi ser på store skalaer. Gravitasjonspotensialet Ψ inngår som et av leddene i ζ, så vi er godt i gang. Jeg skal nå vise at det andre leddet kan forenkles til

$$\frac{ik_i \delta T^0_i H}{k^2} = \frac{1}{3}\delta T^0_0.$$

For å vise dette trenger vi et par ligninger. Den ene har vi sett før,

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\phi} - \Psi\frac{\dot{a}}{a}\right) = -4\pi G a^2 \delta T^0_0,$$

som kommer fra 00-komponenten av den perturberte Einsteinligningen. Vi vil trenge en ligning til som kommer fra $0i$-komponenten. Den har vi ikke regnet ut før, så det betyr en ny runde med indeksgymnastikk. Vi merker oss først at

$$\begin{aligned} G^0_i = g^{0\nu} R_{\nu i} = g^{00} G_{0i} & \\ &= (-1+2\Psi)\left[R_{0i} - \frac{1}{2}g_{0i}\mathcal{R}\right] \\ &= (-1+2\Psi)R_{0i}, \end{aligned}$$

og nå vil jubelen ingen ende ta, for alt vi trenger å gjøre er å regne ut R_{0i}. Vi blir kanskje litt deprimerte når vi innser at

$$R_{0i} = \Gamma^\alpha_{0i,\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\alpha,i} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{0i} - \Gamma^\alpha_{\beta i}\Gamma^\beta_{0\alpha},$$

men så blir vi veldig glade når vi kommer på at vi allerede har regnet ut alle Christoffelsymbolene vi tregner og at det egentlig er veldig gøy med både derivasjon og summasjon. Vi regner ut de enkelte leddene:

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{0i,\alpha} &= \Gamma^0_{0i,0} + \Gamma^j_{0i,j} \\ &= ik_i\Psi_{,0} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^j_{0i} \\ &= ik_i\Psi_{,0} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j}\delta_{ji}(H + \Phi_{,0}) \\ &= ik_i\Psi_{,0} + ik_i\Phi_{,0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{0\alpha,i} &= \Gamma^0_{00,i} + \Gamma^j_{0j,i} \\ &= ik_i\Psi_{,0} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x^i}\delta_{jj}(H + \Phi_{,0}) \\ &= ik_i\Psi_{,0} + 3ik_i\Phi_{,0}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{0i} &= \Gamma^{0}_{\beta 0}\Gamma^{\beta}_{0i} + \Gamma^{j}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{0i} \\
&= \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{0i} + \Gamma^{0}_{k0}\Gamma^{k}_{0i} + \Gamma^{j}_{0j}\Gamma^{0}_{0i} + \Gamma^{j}_{kj}\Gamma^{k}_{0i} \\
&= \sum_k ik_k\Psi\delta_{ki}H + \sum_j ik_i\Psi\delta_{jj}H + \sum_k\sum_j i\Phi[\delta_{jj}k_k + \delta_{jk}k_j - \delta_{kj}k_j]\delta_{ki}H \\
&= ik_iH\Psi + 3ik_iH\Psi + \sum_k\sum_j i\Phi\delta_{jj}k_k\delta_{ki}H \\
&= 4ik_iH\Psi + 3ik_iH\Phi.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{\beta i}\Gamma^{\beta}_{0\alpha} &= \Gamma^{0}_{\beta i}\Gamma^{\beta}_{00} + \Gamma^{j}_{\beta i}\Gamma^{\beta}_{0j} \\
&= \Gamma^{0}_{0i}\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{0}_{ki}\Gamma^{k}_{00} + \Gamma^{j}_{0i}\Gamma^{0}_{0j} + \Gamma^{j}_{ki}\Gamma^{k}_{0j} \\
&= \sum_k \frac{ik^k}{a^2}\Psi\delta_{ki}a^2H + \sum_j ik_j\Psi\delta_{ij} + \sum_k\sum_j i\Phi(\delta_{ij}k_k + \delta_{jk}k_i - \delta_{ik}k_j)\delta_{kj}H \\
&= ik_iH\Psi + ik_iH\Psi + iH\Phi\sum_k\sum_j(\delta_{ij}\delta_{kj}k_k + \delta_{jk}\delta_{kj}k_i - \delta_{ik}\delta_{kj}k_j) \\
&= 2ik_iH\Psi + iH\Phi(k_i + 3k_i - k_i) \\
&= 2ik_iH\Psi - 3ik_iH\Phi.
\end{aligned}
$$

Da får vi

$$
\begin{aligned}
R_{0i} &= ik_i\Psi_{,0} + ik_i\Phi_{,0} - ik_i\Psi_{,0} - 3ik_i\Phi_{,0} \\
&+ 4ik_iH\Psi + 3ik_iH\Phi - 2ik_iH\Psi - 3ik_iH\Psi \\
&= -2ik_i\Phi_{,0} + 2ik_iH\Psi = -2ik_i(\Phi_{,0} - H\Psi) \\
&= -2ik_i\left(\frac{\dot{\Phi}}{a} - H\Psi\right).
\end{aligned}
$$

Men da blir

$$
\begin{aligned}
G^0_i &= (-1+2\Psi)R_{0i} = (-1+2\Psi)(-2ik_i)\left(\frac{\dot{\Phi}}{a} - H\Psi\right) \\
&= 2ik_i\left(\frac{\dot{\Phi}}{a} - H\Psi\right) = \delta G^0_i,
\end{aligned}
$$

fordi det ikke er noe nullteordens bidrag. Dermed gir $\delta G^0_i = 8\pi G\delta T^0_i$

$$
2ik_i\left(\frac{\dot{\Phi}}{a} - H\Psi\right) = 8\pi G\delta T^0_i.
$$

Ved å sette inn $\Phi = -\Psi$ får vi da de to ligningene

$$
\begin{aligned}
-k^2\Psi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(-\dot{\Psi} - \Psi\frac{\dot{a}}{a}\right) &= -4\pi Ga^2\delta T^0_0 \\
2ik_i\left(/\frac{\dot{\Psi}}{a} - H\Psi\right) &= 8\pi G\delta T^0_i.
\end{aligned}
$$

Vi multipliserer den andre ligningen med ik_i og summerer over i:

$$2ik_iik_i\left(-\frac{\dot\Psi}{a}-H\Psi\right)=8\pi Gik_i\delta T^0_i,$$

som gir

$$k^2\left(\frac{\dot\Psi}{a}+H\Psi\right)=4\pi Gik_i\delta T^0_i.$$

Setter vi inn $\dot a/a=aH$ i den første ligningen får vi

$$-k^2\Psi-3aH(\dot\Psi+aH\Psi)=-4\pi Ga^2\delta T^0_0.$$

Men den andre ligningen gir

$$\frac{k^2}{a}(\dot\Psi+aH\Psi)=4\pi Gik_i\delta T^0_i,$$

så

$$-k^2\Psi-3aH\frac{4\pi Ga}{k^2}ik_i\delta T^0_i=-4\pi Ga^2\delta T^0_0.$$

Fordi vi ser på store skalaer er det første leddet på venstresiden neglisjerbart. Dermed får vi

$$\frac{ik_i\delta T^0_iH}{k^2}(-3a^24\pi G)=-4\pi Ga^2\delta T^0_0,$$

som gir

$$\frac{ik_i\delta T^0_iH}{k^2}=\frac{1}{3}\delta T^0_0.$$

På store skalaer har vi derfor at

$$\zeta=-\frac{1}{3}\frac{\delta T^0_0}{\rho+p}-\Psi,$$

som gjør at vi kan skrive Ψ som

$$\Psi=-\zeta-\frac{1}{3}\frac{\delta T^0_0}{\rho+p}.$$

Vi setter dette inn i ligningen vi startet med:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta T^0_0}{\partial t}+3H\delta T^0_0-H\delta T^i_i &= -3(\rho+p)\frac{\partial}{\partial t}\left[-\zeta-\frac{1}{3}\frac{\delta T^0_0}{\rho+p}\right]\\ &= 3(p+\rho)\frac{\partial\zeta}{\partial t}+(p+\rho)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta T^0_0}{p+\rho}\right)\\ &= 3(p+\rho)\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\delta T^0_0}{\partial t}+(p_\rho)\delta T^0_0\frac{\partial}{\partial t}(\rho+p)^{-1}.\end{aligned}$$

Dermed

$$3H\delta T^0_0-H\delta T^i_i=3(p+\rho)\frac{\partial\zeta}{\partial t}+(p+\rho)\delta T^0_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{p+\rho},$$

slik at

$$
\begin{aligned}
3(p+\rho)\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \delta T_0^0\left[3H-(p+\rho)\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{p+\rho}\right]-H\delta T_i^i \\
&= \delta T_0^0\left[3H+\frac{1}{\rho+p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial t}\right)\right]-H\delta T_i^i.
\end{aligned}
$$

Siden ρ og p er uperturbert trykk og uperturbert energitetthet oppfyller de

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-3H(\rho+p),$$

dvs.

$$\frac{1}{\rho+p}\frac{\partial\rho}{\partial t}=-3H.$$

Dette setter vi inn:

$$
\begin{aligned}
3(\rho+p)\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \delta T_0^0\left(3H-3H+\frac{1}{\rho+p}\frac{\partial p}{\partial t}\right)-H\delta T_i^i \\
&= \delta T_0^0\frac{1}{\rho+p}\frac{\partial p}{\partial t}-H\delta T_i^i.
\end{aligned}
$$

Og endelig får vi et uttrykk for $\partial\zeta/\partial t$ på stor skala:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= -\frac{1}{3(\rho+p)^2}\left[H(\rho+p)\delta T_i^i-\delta T_0^0\frac{\partial p}{\partial t}\right] \\
&= -\frac{1}{3(\rho+p)^2}\left(-\frac{1}{3}\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta T_i^i-\frac{\partial p}{\partial t}\delta T_0^0\right).
\end{aligned}
$$

Høyresiden av denne ligningen er proporsjonal med

$$\frac{\delta T_i^i}{3}+\frac{\partial p}{\partial\rho}\delta T_0^0.$$

I det uperturberte tilfellet er $T_i^i/3=p$ og $T_0^0=-\rho$, så $\delta\rho=-\delta T_0^0$ og $\delta p=\delta T_i^i/3$. Dermed kan vi skrive uttrykket over som

$$\delta p-\delta\rho\frac{\partial p}{\partial\rho}=0,$$

for adiabatiske perturbasjoner (pr. def.) Det er denne type perturbasjoner som er mest interessante kosmologisk sett. Dermed har vi vist at på store skalaer og for adiabatiske perturbasjoner er

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0,$$

og dermed er ζ en bevart størrelse. La oss håpe at det var verdt bryet å vise dette.

Og det var det! Nå er det nemlig plankekjøring å finne styrkespekteret av fluktuasjoner i Ψ. Siden ζ er bevart må vi ha

$$-\frac{3}{2}\Psi_{\text{etter}} = -\left(\frac{aH\delta\phi}{\dot{\phi}^{(0)}}\right)_{k=aH}.$$

slik at

$$\Psi_{\text{etter}} = \frac{2}{3}aH\left(\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}^{(0)}}\right)_{k=aH}.$$

Da må vi også ha

$$\begin{aligned}
P_\Psi(k) &= \frac{4}{9}\left(\frac{aH}{\dot{\phi}^{(0)}}\right)^2 P_{\delta\phi}(k=aH) \\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{aH}{\dot{\phi}^{(0)}}\right)^2\left(\frac{H^2}{2k^3}\right)_{k=aH} \\
&= \frac{2}{9k^3}\left(\frac{aH^2}{\dot{\phi}^{(0)}}\right)^2_{k=aH}.
\end{aligned}$$

Fra definisjonen av slow-rollparameteren ϵ har vi

$$\epsilon = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H}\right) = -\frac{\dot{H}}{aH^2}.$$

Vi har også

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -3H(\rho+p) = -3H\left(\frac{\dot{\phi}^{(0)}}{a}\right)^2,$$

som er ekvivalent med

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\rho}{\partial\eta} = -3H\left(\frac{\dot{\phi}^{(0)}}{a}\right)^2,$$

og med

$$\frac{H}{a}\frac{\partial\rho}{\partial\eta} = -3H^2\left(\frac{\dot{\phi}^{(0)}}{a}\right)^2 = -8\pi G\rho\left(\frac{\dot{\phi}^{(0)}}{a}\right)^2,$$

der vi har brukt Friedmannligningen $H^2 = 8\pi G\rho/3$. Dette kan vi skrive som

$$8\pi G(\dot{\phi}^{(0)})^2 = -\frac{a^2}{\rho}\frac{H}{a}\frac{\partial\rho}{\partial\eta} = -aH\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\eta}.$$

Men vi kan også skrive

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\eta} = \frac{8\pi G}{3H^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{1}{H^2}\frac{\partial}{\partial}H^2 = \frac{2H\dot{H}}{H^2} = \frac{2\dot{H}}{H}.$$

I tillegg har vi

$$\frac{\dot{H}}{H} = -a\epsilon H.$$

Det kan vi sette inn over og få

$$8\pi G(\dot{\phi^{(0)}})^2 = 2\epsilon a^2 H^2,$$

slik at

$$4\pi G(\dot{\phi^{(0)}})^2 = \epsilon a^2 H^2.$$

Dette kan vi sette inn i uttrykket for P_Ψ:

$$P_\Psi(k) = P_\Phi(k) = \frac{8\pi G}{9k^3}\left(\frac{H^2}{\epsilon}\right)_{aH=k}.$$

Brødrene Dal og spektralindeksene

Vi har nå vist at dersom en inflasjonsfase drevet av et skalarfelt virkelig fant sted i det tidlige univers, så vil en nødvendig konsekvens av dette være at det lages gravitasjonsbølger (dvs. tensorperturbasjoner, h) og fluktuasjoner i gravitasjonspotensialet Φ. De siste fluktuasjonene fungerer, har vi sett, som en kilde til tetthetsperturbasjoner og temperaturanisotropier. Med andre ord: dersom inflasjon fant sted, så har vi nå i grove trekk forklart hvordan vi ble til. Muligens en omstendelig forklaring, men jeg vil tro at mange foreldre faktisk ville foretrekke å fortelle denne historien når deres barn spør om hvordan de ble til. Dette kurset har, slik jeg ser det, et stort potensiale til å bli en hit blant blyge småbarnsforeldre.

Det store spørsmålet er selvfølgelig om inflasjon virkelig fant sted. Vi så i AST4220 at inflasjon løser noen vanskelige problemer i Big Bang-modeller, og nå har vi sett at vi som en bonus kan få laget tetthetsfluktuasjoner. Men at inflasjon er fint betyr ikke at det er sant. I troskap mot de vitenskapelige idealer vi er satt til å forvalte må vi finne en empirisk test for dette scenariet. Den eneste måten å gjøre det på er å måle egenskapene til perturbasjonene som inflasjon genererer, med andre ord bestemme (iallefall delvis) $P_\Phi(k)$ og $P_h(k)$ ved hjelp av observasjoner. Som dere vil få se senere i kurset er ikke det så helt enkelt, siden de fleste fluktuasjonene vi kan se har gjennomgått en utvikling siden de kom nyfødt ut av inflasjonsfasen. En annen komplikasjon er at inflasjon er mer en ide enn en modell: veldig mange ulike modeller med ett eller flere skalarfelter kan brukes til å lage en inflasjonsfase i det veldig tidlige univers.

En vanlig strategi for å knytte forbindelsen til observasjoner er å parametrisere fluktuasjonsspektrene ved hjelp av to amplituder amplitude A_T og δ_H, og to såkalte spektralindekser n_T og n:

$$\begin{aligned}
P_h(k) &= \left(\frac{8\pi G H^2}{k^3}\right)_{k=aH} \equiv A_T k^{n_T-3} \\
P_\Phi(k) &= \left(\frac{8\pi G}{9k^3}\frac{H^2}{\epsilon}\right)_{k=aH} \equiv \frac{50\pi}{9k^3}\left(\frac{k}{H_0}\right)^{n-1}\delta_H^2\left(\frac{\Omega_m}{D_1(a=1)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Disse definisjonene, spesielt den siste, ser litt tåpelige ut, og inneholder en funksjon som dere først vil lære om i kapittel 7, vekstfunksjonen D_1. Hva verre er, så finnes det andre konvensjoner for hvordan amplitudene til de to spektrene skal defineres. Men alt dette blåser vi i nå. Hvis $n_T = 0$ og $n = 1$ sies spektrene å være *skalainvariante*. Det kommer av at da er de dimensjonsløse størrelsene $k^3 P_h(k)$ og $k^3 P_\Phi(k)$ uavhengige av k. Det vi skal gjøre nå er å relatere n_T og n til potensialet som inflatonet beveger seg i.

Vi starter med tensorfluktuasjonene. Vi ser at

$$\ln P_h(k) = \ln A_T + (n_T - 3)\ln k,$$

slik at

$$n_T - 3 = \frac{d\ln P_h}{d\ln k}.$$

Men vi kan også bruke uttrykket for P_h som vi beregnet,

$$\ln P_h(k) = \ln(8\pi G) - 3\ln k + 2\ln H,$$

der det her og fra nå av er underforstått at uttrykkene skal regnes ut ved $k = aH$. Deriverer vi, få r vi

$$\frac{d\ln P_h}{d\ln k} = -3 + 2\frac{d\ln H}{d\ln k}.$$

Da ser vi at vi må ha

$$n_T = 2\frac{d\ln H}{d\ln k}.$$

Vi skal nå se at dersom vi antar slow-rollinflasjon, så kan n_T uttrykkes ved slow-rollparametrene. Dodelson bruker en litt uvanlig (for ikke å si veldig idiotisk) definisjon av disse. Jeg vil gå tilbake til definisjonene jeg brukte i AST4220:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \\ \eta &= \frac{1}{8\pi G}\frac{V''}{V}, \end{aligned}$$

der V er potensialet til skalarfeltet. Et problem her er at vi allerede har brukt η til å betegne konform tid. Men jeg orker ikke å tenke ut et nytt navn (δ-en til Dodelson er fullstendig tullete), og jeg har ikke tenkt til å bruke konform tid i dette avsnittet uansett, så det burde være mulig å unngå misforståelser. En annen ting jeg kommer til å gjøre er å betegne den homogene biten av skalarfeltet for ϕ, ikke $\phi^{(0)}$ som tidligere. La oss først sjekke at vår gode, gamle ϵ stemmer overens med Dodelsons nye, teite ϵ så lenge vi har slow-roll-inflasjon. Den dumme definisjonen av ϵ var

$$\epsilon = \frac{d}{dt}\frac{1}{H}.$$

Under slow-roll-inflasjon gjelder ligningene

$$\begin{aligned} H^2 &\approx \frac{8\pi G}{3}V \\ 3H\frac{d\phi}{dt} &\approx -V', \end{aligned}$$

der $V' = dV/d\phi$. Dette kan vi sette inn i det teite uttrykket for ϵ og gjøre det finere:

$$\begin{aligned}
\epsilon &= -\frac{1}{H^2}\frac{dH}{dt} \\
&= -38\pi G \frac{d}{dt}\left(\frac{8\pi G}{3}\right)^{1/2} \\
&= -\left(\frac{3}{8\pi G}\right)^{1/2}\frac{1}{V}\frac{1}{2V^{1/2}}\frac{dV}{dt} \\
&= -\left(\frac{3}{8\pi G}\right)^{1/2}\frac{1}{2V^{3/2}}\frac{d\phi}{dt}V'.
\end{aligned}$$

Men fra den andre slow-roll-ligningen har vi at

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{V'}{3H},$$

og da får vi

$$\begin{aligned}
\epsilon &= -\left(\frac{3}{8\pi G}\right)^{1/2}\frac{V'}{2V^{3/2}}\left(-\frac{V'}{3H}\right) \\
&= \left(\frac{3}{8\pi G}\right)^{1/2}\frac{(V')^2}{6V^{3/2}}\left(\frac{3}{8\pi G}\right)^{1/2}\frac{1}{V^{1/2}} \\
&= \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2,
\end{aligned}$$

og utrykket er blitt slik vi ville ha det. Så Dodelsons ϵ er også vår ϵ. Den andre slow-roll-parameteren han bruker, δ, er imidlertid ikke helt den samme som vår η, så den vil jeg ikke snakke mere om.

Vi ønsker å derivere med hensyn på $\ln k$, og vi ønsker å gjøre det ved epoken der $k = aH$, dvs.

$$\ln k = \ln a + \ln H.$$

Under slow-roll varierer H langsomt, og iallefall mye langsommere enn a. Derfor tilnærmer vi H med en konstant og får

$$d(\ln k) = d(\ln a) = \frac{d\ln a}{dt}dt = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}dt = H dt.$$

Slow-roll-ligningen

$$3H\frac{d\phi}{dt} = -V'$$

kan skrives som

$$dt = -3\frac{H}{V'}d\phi,$$

og dermed har vi at

$$\frac{d}{d(\ln k)} = \frac{1}{H}\frac{d}{dt} = -\frac{V'}{3H^2}\frac{d}{d\phi},$$

og ved å bruke at

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V$$

får vi

$$\frac{d}{d\ln k} = -\frac{1}{8\pi G}\frac{V'}{V}\frac{d}{d\phi},$$

som altså gjelder ved epoken der $k = aH$. Siden $\ln H = \frac{1}{2}\ln V +$konstant, finner vi da at

$$\begin{aligned} n_T &= \frac{d\ln V}{d\ln k} \\ &= -\frac{1}{8\pi G}\frac{V'}{V}\frac{d}{d\phi}\ln V \\ &= -\frac{1}{8\pi G}\frac{V'}{V}\frac{V'}{V} \\ &= -\frac{1}{8\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 = -2\epsilon. \end{aligned}$$

På tilsvarende vis finner vi nå

$$\begin{aligned} n - 1 - 3 &= \frac{d\ln P_\Phi}{d\ln k} \\ &= -3 + 2\frac{d\ln H}{d\ln k} - \frac{d\ln\epsilon}{d\ln k} \\ &= -3 - 2\epsilon - 2\frac{d}{d\ln k}\ln\frac{V'}{V}, \end{aligned}$$

der vi i det andre leddet har brukt resultatet fra utregningen av n_T, og i det tredje leddet har vi brukt uttrykket for ϵ. Vi kan regne videre på dette leddet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\ln k}\ln\frac{V'}{V} &= -\frac{1}{8\pi G}\frac{V'}{V}\frac{d}{d\phi}(\ln V' - \ln V) \\ &= -\frac{1}{8\pi G}\frac{V'}{V}\left(\frac{V''}{V'} - \frac{V'}{V}\right) \\ &= -\frac{1}{8\pi G}\frac{V''}{V} + \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \\ &= -\eta + 2\epsilon, \end{aligned}$$

der vi i den siste overgangen igjen har brukt uttrykkene for ϵ og η. Dermed får vi

$$n - 4 = -3 - 2\epsilon + 2\eta - 4\epsilon = -3 + 2\eta - 6\epsilon,$$

eller, om du vil

$$n = 1 + 2\eta - 6\epsilon.$$

Siden ϵ og ϵ må være små hvis vi skal ha slow-roll-inflasjon, betyr det at vi forventer at spektrene for både skalar-og tensorperturbasjoner skal være nær skalainvariante. Men dersom skalarfeltet gjør noe interessant i det hele tatt, vil ϵ og η være forskjellige fra null, så det burde være små avvik fra skalainvarians dersom inflasjon har noe for seg.

Vi har altså lært at spektralindeksene er bestemt av ϵ og η. Disse avhenger av potensialet til skalarfeltet og dets deriverte. Ved å måle både skalar- og tensorperturbasjoner kan vi i prinsippet bestemme A_T, δ_H, n_T og n. Fra n_T og n kan vi bestemme ϵ og η. Men går vi tilbake til uttrykkene for P_h og P_Φ, ser vi at

$$\frac{P_h}{P_\Phi} = 9\epsilon.$$

Dette forteller oss to ting: for det første at siden vi forventer at ϵ skal være liten, så vil tensormodene ha en betydelige lavere amplitude enn skalarmodene. For det andre ser vi at dersom vi kan måle begge typer moder, så har vi også en konsistensjekk: spektralindeksene gir ϵ og η, og da sier teorien at forholdet mellom amplitudene skal være lik 9ϵ. Dette kan vi sjekke mot det målte forholdet A_T/δ_H. Dersom dette ikke er lik 9ϵ er det noe galt med inflasjon. Dette høres lovende ut, men for å helle litt malurt i begeret med en gang må jeg si at denne konsistensbetingelsen bare gjelder dersom bare ett skalarfelt har hovedansvaret for inflasjonsfasen. Det kan godt tenkes at mer enn ett felt er involvert (det er faktisk ganske populært for tiden å regne på inflasjonsmodeller med mer enn ett felt), og da går denne konsistensbetingelsen i dass. En annen og mer praktisk utfordring er at tensormodene er små, og ingen har sett klare tegn til at de finnes ennå. Det klareste tegnet på at de virkelig finnes får vi om vi ser såkalte B-moder i polarisasjonen av bakgrunnstrålingen. Dette får dere kanskje vite mere om senere.

Så er våre lidelser over

Melodi: 'My way'. Synges med stor innlevelse.

> Og nå er enden her,
> vi har beregnet alle spektra.
> Min venn, det var vel gøy,
> personlig er jeg blitt helt hekta.
> Vi har slitt og strevet trutt,
> men så til slutt,
> har vi nådd målet.
> Og da, ja da ser vi
> at alt var verdt å tåle.
>
> For hva er en μ og en derivasjon?
> En Ricciskalar og en kontraksjon?
> Når pennen er tom og hjernen blør,
> hever vi hodet og har godt humør!
> For til slutt så koker alt ned
> til slow-roll-parameeeeeeeetrene!