Initialbetingelser: I begynnelsen var ϕ

I fysikken er diffligninger og initialbetingelser som wienerpølser og rekesalat: de trenger hverandre. Vi har etter mye slit satt opp diffligningene som styrer tidsutviklingen av perturbasjoner i strålingsfelt, materie, og gravitasjonspotensialene. Ligningene er:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Theta} + ik\mu\Theta &= -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi - \dot{\tau}\left[\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2}P_2(\mu)\Pi\right] && (1)\\
\Pi &= \Theta_2 + \Theta_{P2} + \Theta_{P0} && (2)\\
\dot{\Theta}_P + ik\mu\Theta_P &= -\dot{\tau}\left[-\Theta_P + \frac{1}{2}(1 - P_2(\mu))\Pi\right] && (3)\\
\dot{\delta} + ikv &= -3\dot{\Phi} && (4)\\
\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v &= -ik\Psi && (5)\\
\dot{\delta}_b + ikv_b &= -3\dot{\Phi} && (6)\\
\dot{v}_b + \frac{\dot{a}}{a}v_b &= -ik\Psi + \frac{\dot{\tau}}{R}[v_b + 3i\Theta_1] && (7)\\
\dot{\mathcal{N}} + ik\mu\mathcal{N} &= -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi && (8)\\
k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} - \Psi\frac{\dot{a}}{a}\right) &= 4\pi Ga^2(\rho_{\mathrm{dm}}\delta + \rho_b\delta_b + 4\rho_\gamma\Theta_0 + 4\rho_\nu\mathcal{N}_0) && (9)\\
k^2(\Phi + \Psi) &= -32\pi Ga^2(\rho_\gamma\Theta_2 + \rho_\nu\mathcal{N}_2) && (10)\\
\ddot{h}_\alpha + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_\alpha + k^2h_\alpha &= 0\ (\alpha = +, \times) && (11)
\end{aligned}
$$

Disse skal nå utstyres med initialbetingelser. Det første vi må finne ut av er ved hvilken epoke i universets historie disse initialbetingelsene skal spesifiseres. Det kan kanskje virke opplagt å velge $t = 0$, men da vet vi at Big Bang-modellen bryter sammen, og vi har ikke kontroll over fysikken som er involvert. Vi trenger et vagere og mer uspesifisert tidspunkt. Først husker vi at ligningene over er formulert ved hjelp av konform tid η, som har samme enhet som en lengde. Det tidlige univers var strålingsdominert, og da har vi at

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a} \propto \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}} \propto \sqrt{t} \propto a.$$

Så husker vi at ligningene også er skrevet i Fourierrommet, og derfor forteller oss om tidsutviklingen til en Fouriermode med et bestemt bølgetall k. Bølgetallet svarer til en bølgelengde $\lambda = 2\pi/k$, slik at en Fouriermode av, for eksempel, tetthetsperturbasjonene svarer til en variasjon i tettheten over en lengdeskala λ. Fra k og η kan vi konstruere den dimensjonsløse størrelsen $k\eta$. Vi skal velge å sette initialbetingelsene for en η som er slik at $k\eta \ll 1$ for alle k som svarer til lengdeskalaer som er fysisk interessante i dag. Som jeg sa, vagt og upresist. Det dette betyr i praksis er at vi kan neglisjere alle ledd som har en faktor k foran seg. For eksempel: i ligning (1) kan vi neglisjere det andre leddet på venstresiden i forhold til det første, siden

$$\frac{\dot{\Theta}}{ik\mu\Theta} \sim \frac{\Theta/\eta}{k\Theta} \sim \frac{1}{k\eta} \gg 1.$$

Konform tid η er et mål på partikkelhorisonten ved en gitt tid t (når vi ser bort fra inflasjon). Kriteriet $k\eta \ll 1$ er ekvivalent med $\lambda \gg \eta$, og kan derfor forstås som at de perturberte størrelsene ved tidspunktet vi setter initialbetingelsene, varierer over en lengdeskala som er mye større enn partikkelhorisonten. Det betyr at en observatør i et gitt punkt ved dette tidspunktet ser en fordeling av fotoner som med god tilnærming er jevn innenfor hans horisont, dvs. at fordelingen er karakterisert ved en monopol, og at høyere ordens momenter kan neglisjeres. Strategien vår vil være å bruke dette til å forenkle ligningene over og å relatere alle perturbasjonene ved epoken $k\eta \ll 1$ til verdien av det perturberte gravitasjonspotensialet Φ. Siden $\Theta \approx \Theta_0$, kan vi forenkle den første ligningen til

$$\dot{\Theta}_0 + \dot{\Phi} = 0,$$

og tilsvarende for masseløse nøytrinoer,

$$\dot{\mathcal{N}}_0 + \dot{\Phi} = 0.$$

Ligningene for tetthetsperturbasjonene δ og δ_b forenkles til

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= -3\dot{\Phi} \\ \dot{\delta}_b &= -3\dot{\Phi}. \end{aligned}$$

Siden høyere ordens momenter kan neglisjeres, kan vi sette

$$v = 0,\ v_b = 0.$$

Ser vi på ligning (9), så kan leddet $k^2\Phi$ neglisjeres. Videre, siden universet er strålingsdominert, kan leddene $\rho_{\mathrm{dm}}\delta$ og $\rho_b\delta_b$ neglisjeres sammenlignet med bidragene fra stråling. Dermed har vi

$$3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} - \Psi\frac{\dot{a}}{a}\right) = 16\pi G a^2(\rho_\gamma\Theta_0 + \rho_\nu\mathcal{N}_0).$$

Vi har sett at $\eta \propto a$ i den strålingsdominerte fasen, så da er $\dot{a}/a = 1/\eta$,

$$\frac{\dot{\Phi}}{\eta} - \frac{\Psi}{\eta^2} = \frac{16\pi G a^2}{3}(\rho_\gamma\Theta_0 + \rho_\nu\mathcal{N}_0).$$

Vi skriver den totale tettheten som $\rho = \rho_\gamma + \rho_\nu$, og da kan vi skrive

$$\frac{\dot{\Phi}}{\eta} - \frac{\Psi}{\eta^2} = \frac{16\pi G\rho a^2}{3}\left(\frac{\rho_\gamma}{\rho}\Theta_0 + \frac{\rho_\nu}{\rho}\mathcal{N}_0\right).$$

Både fotoner og masseløse nøytrinoer oppfører seg som stråling. Og da universet er strålingsdominert, kan vi bruke Friedmannligningen til å forenkle venstresiden. Vi har

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho.$$

Men $da/dt = \dot{a}/a$ og $\dot{a}/a = 1/\eta$, så

$$\frac{1}{\eta^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2.$$

Dermed:

$$\frac{\dot{\Phi}}{\eta} - \frac{\Psi}{\eta^2} = \frac{2}{\eta^2}\left(\frac{\rho_\gamma}{\rho}\Theta_0 + \frac{\rho_\nu}{\rho}\mathcal{N}_0\right).$$

Vi innfører så

$$f_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho} = \frac{\rho_\nu}{\rho_\nu + \rho_\gamma},$$

som er konstant, siden både ρ og ρ_ν varierer som $1/a^4$. Vi ser at $1 - f_\nu = \rho_\gamma/\rho$, og kan da skrive

$$\frac{\dot{\Phi}}{\eta} - \frac{\Psi}{\eta^2} = \frac{2}{\eta^2}[(1-f_\nu)\Theta_0 + f_\nu\mathcal{N}_0],$$

som gir

$$\eta\dot{\Phi} - \Psi = 2[(1-f_\nu)\Theta_0 + f_\nu\mathcal{N}_0].$$

Vi deriverer den med hensyn på η, og bruker at $\dot{\Theta}_0 = \dot{\mathcal{N}}_0 = -\dot{\Phi}$:

$$\begin{aligned}
\eta\ddot{\Phi} + \dot{\Phi} - \dot{\Psi} &= 2[(1-f_\nu)\dot{\Theta}_0 + f_\nu\dot{\mathcal{N}}_0] \\
&= 2[-(1-f_\nu)\dot{\Phi} - f_\nu\dot{\Phi}] \\
&= -2\dot{\Phi}(1 - f_\nu + f_\nu) = -2\dot{\Phi}.
\end{aligned}$$

Det gir ligningen

$$\eta\ddot{\Phi} + 3\dot{\Phi} - \dot{\Psi} = 0.$$

Sidene høyere momenter er neglisjerbare, gir ligning (10) at

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2(\rho_\gamma\Theta_2 + \rho_\nu\mathcal{N}_2) \approx 0,$$

slik at $\Psi \approx -\Phi$. Innsatt i ligningen over gir dette

$$\eta\ddot{\Phi} + 4\dot{\Phi} = 0.$$

Da har vi endt opp med en diffligning for Φ, gyldig ved tider som er slik at $k\eta \ll 1$. Denne ligningen kan vi løse: vi setter $\Phi = \eta^p$, og innsatt i ligningen gir dette

$$p(p-1)\eta^{p-1} + 4p\eta^{p-1} = 0,$$

dvs.

$$p(p+3) = 0.$$

Løsningen $p = -3$ svarer til en perturbasjon som raskt dør ut. Hvis noe setter denne moden i gang, vil den raskt forsvinne. Den andre løsningen, $p = 0$ svarer til en konstant mode, og den kan brukes til å sette de andre perturbasjonene i gang. Vi får da $\dot{\Phi} = 0$ og

$$-\Psi = \Phi = 2[(1 - f_\nu)\Theta_0 + f_\nu \mathcal{N}_0].$$

Siden Φ og f_ν er konstante, må det samme gjelde for Θ_0 og $\mathcal{N}_0$. Det er rimelig å tro at mekanismen som genererer perturbasjonene ikke skiller mellom fotoner og masseløse nøytrinoer. Kaller vi tidspunktet der vi starter tidsutviklingen for η_i,kan vi da sette

$$\Theta_0(k, \eta_i) = \mathcal{N}_0(k, \eta_i),$$

som gir

$$\Phi(k, \eta_i) = 2\Theta_0(k, \eta_i).$$

Fra ligningen for δ har vi

$$\dot{\delta} = -3\dot{\Phi} = 3\dot{\Theta}_0,$$

som gir

$$\delta = 3\Theta_0 + \text{ konstant},$$

og det samme resultatet gjelder for baryonene:

$$\delta_b = 3\Theta_0 + \text{ konstant}.$$

Det er to kvalitativt forskjellige muligheter: dersom konstanten er lik 0, har vi såkalte adiabatiske initialbetingelser. Dersom konstanten er forskjellig fra null, har vi såkalte isokrumningsinitialbetingelser. Observasjoner tyder på at det er adiabatiske initialbetingelser som er mest aktuelle, og det sparer oss for å skrive et langt ord mange ganger. Adiabatiske perturbasjoner har den egenskap at det lokale forholdet mellom antallstettheten av mørk materie og fotoner, og av baryoner og fotoner, er konstant. For eksempel:

$$\frac{n_b}{n_\gamma} = \frac{n_b^{(0)}}{n_\gamma^{(0)}}\left(\frac{1+\delta}{1+3\Theta_0}\right) = \frac{n_b^{(0)}}{n_\gamma^{(0)}}(1 + \delta - 3\Theta_0) = \frac{n_b^{(0)}}{n_\gamma^{(0)}}.$$

Folk som liker å pine seg selv kan nå gå videre og finne initialbetingelsene for $\Theta_1, \mathcal{N}_1$ osv. De viser seg å være

$$\Theta_1 = \mathcal{N}_1 = \frac{iv_b}{3} = \frac{iv}{3} = -\frac{k\Phi}{6aH}.$$

Vi skal ikke vise dette, men vi skal gjennomføre én asketisk øvelse. Hensikten er å vise at nøytrinoer gir opphav til en liten korreksjon til relasjonen $\Phi = -\Psi$, og å få litt øvelse med å ta multipolmomenter av ligninger. Korreksjonen vi skal utlede er relevant om vi ønsker å gå utover laveste orden i $k\eta$. Vi starter med ligningen

$$\dot{\mathcal{N}} + ik\mu\mathcal{N} = -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi.$$

Multipolmomenter av $\mathcal{N}$ er definert ved

$$\mathcal{N}_\ell = \frac{1}{(-i)^\ell} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} P_\ell(\mu) \mathcal{N}.$$

De tre første Legendrepolynomene er

$$\begin{aligned}
P_0(\mu) &= 1 \\
P_1(\mu) &= \mu \\
P_2(\mu) &= \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1).
\end{aligned}$$

Det første vi gjør er å gange ligningen med P_0 og integrere: Det gir

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} P_0 \dot{\mathcal{N}} + ik\mu \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} \mu P_0 \mathcal{N} = -\int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} P_0(\mu)(-\dot{\Phi} - ik\mu\Psi).$$

Vi har at $\mu P_0 = \mu = P_1$. Videre er Ψ og Φ uavhengige av μ, og

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} \mu = 0,$$

så

$$\dot{\mathcal{N}}_0 + k \frac{1}{-i} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} P_1(\mu) \mathcal{N} = -\dot{\Phi} + 0,$$

dvs.

$$\dot{\mathcal{N}} + k\mathcal{N}_1 = -\dot{\Phi}.$$

Neste moment blir

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} P_1(\mu) \dot{\mathcal{N}} + ik \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} \mu P_1(\mu) \mathcal{N} = \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} (-\dot{\Phi} - ik\mu\Psi) P_1(\mu).$$

Ved guddommelig inspirasjon innser vi at

$$\mu P_1 = \mu^2 = \frac{1}{3}(2P_2 + 1) = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_0.$$

Da får vi

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} \mu P_1 \mathcal{N} &= \frac{2}{3} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} P_2 \mathcal{N} + \frac{1}{3} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} P_0 \mathcal{N} \\
&= \frac{2}{3}(-i)^2 \frac{1}{(-i)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} P_2 \mathcal{N} + \frac{1}{3}\mathcal{N}_0 \\
&= -\frac{2}{3}\mathcal{N}_2 + \frac{1}{3}\mathcal{N}_0.
\end{aligned}$$

Videre har vi at

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} (-\dot{\Phi} - ik\mu\Psi)\mu = 0 - ik\Psi \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{\mu^2}{2} = -\frac{ik}{3}\Psi.$$

Dermed får vi ligningen

$$-i\dot{\mathcal{N}}_1 + ik\left(-\frac{2}{3}\mathcal{N}_2 + \frac{1}{3}\mathcal{N}_0\right) = -\frac{ik}{3}\Psi,$$

som vi ordner om til

$$\dot{\mathcal{N}}_1 - \frac{k}{3}(\mathcal{N}_0 - 2\mathcal{N}_2) = \frac{k}{3}\Psi.$$

Dette var usigelig morsomt, så vi tar et moment til:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{2}P_2\dot{\mathcal{N}} + ik\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{2}P_2\mu\mathcal{N} = -\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{2}P_2(\dot{\Phi} + ik\mu\Psi).$$

Det første integralet på venstresiden er enkelt:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{2}P_2\dot{\mathcal{N}} = (-i)^2\frac{1}{(-i)^2}\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{2}P_2\dot{\mathcal{N}} = -\dot{\mathcal{N}}_2.$$

I det andre integralet bruker vi rekursjonsformelen

$$(2\ell-1)\mu P_{\ell-1} = \ell P_\ell + (\ell-1)P_{\ell-2},$$

som med $\ell = 3$ gir

$$\mu P_2 = \frac{3}{5}P_3 + \frac{2}{5}P_1,$$

og dermed kan integralet skrives som

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{2}\mu P_2\mathcal{N} &= \frac{2}{5}\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{2}P_1\mathcal{N} + \frac{3}{5}\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{2}P_3\mathcal{N} \\
&= \frac{2}{5}(-i)\mathcal{N}_1 + \frac{3}{5}(-i)^3\mathcal{N}_3 \\
&= -i\left(\frac{2}{5}\mathcal{N}_1 - \frac{3}{5}\mathcal{N}_3\right).
\end{aligned}$$

På høyresiden må vi regne ut integralene

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{2}P_2 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1}d\mu(3\mu^2-1) = 0,$$

og

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{2}\mu P_2 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1}d\mu(3\mu^3-\mu) = 0.$$

Dermed får vi ligningen

$$-\dot{\mathcal{N}}_2 + ik(-i)\left(\frac{2}{5}\mathcal{N}_1 - \frac{3}{5}\mathcal{N}_3\right) = 0.$$

Man kan vise at $\mathcal{N}_3/\mathcal{N}_2 \sim k\eta \ll 1$, så vi neglisjerer $\mathcal{N}_3$ og ender opp med ligningen

$$\dot{\mathcal{N}}_2 - \frac{2}{5}k\mathcal{N}_1 = 0.$$

Vi har da tre ligninger for de tre laveste momentene. Deriverer vi den siste med hensyn på konform tid og bruker deretter den andre ligningen, får vi

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathcal{N}}_2 &= \frac{2}{5}k\dot{\mathcal{N}}_1 \\
&= \frac{2}{5}k\frac{k}{3}(\mathcal{N}_0 - 2\mathcal{N}_2 + \Psi) \\
&\approx \frac{2k^2}{15}(\Psi + \mathcal{N}_0),
\end{aligned}$$

der vi i den siste overgangen har neglisjert $\mathcal{N}_2$ i sammenligning med $\mathcal{N}_0$. Så tar vi en titt på ligningen

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2(\rho_\gamma \Theta_2 + \rho_\nu \mathcal{N}_2).$$

Comptonspredning angår fotoner, ikke nøytrinoer, og i det tidlige univers er dette en svært effektiv prosess. Den vil bidra til å jevne ut fotonfordelingen, og vi kan derfor regne med at $\Theta_2 \ll \mathcal{N}_2$. Bruker vi at $\rho_\nu = f_\nu \rho$, kan vi da skrive

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2 \rho_\nu \mathcal{N}_2 = -32\pi G a^2 \rho f_\nu \mathcal{N}_2.$$

Fra Friedmannligningen har vi at

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{1}{\eta a}\right)^2,$$

og dermed at

$$k^2(\Phi + \Psi) = -\frac{12}{\eta^2} f_\nu \mathcal{N}_2,$$

som gir

$$\mathcal{N}_2 = -(k\eta)^2 \frac{\Phi + \Psi}{12 f_\nu}.$$

Siden f_ν er konstant, og Φ og Ψ også er tilnærmet konstante, så har vi at

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{N}}_2 &= -2k^2\eta\frac{\Phi + \Psi}{12 f_\nu}, \\
\ddot{\mathcal{N}}_2 &= = 2k^2\frac{\Phi + \Psi}{12 f_\nu}.
\end{aligned}$$

Vi har da to uttrykk for $\ddot{\mathcal{N}}_2$, og disse må være like:

$$\frac{2k^2}{15}(\Psi + \mathcal{N}_0) = -\frac{2k^2}{12 f_\nu}(\Phi + \Psi).$$

Vi bruker så initialbetinglsen $\Phi = 2\Theta_0 = 2\mathcal{N}_0$:

$$\frac{4}{5}\left(\Psi + \frac{1}{2}\Phi\right) = -\Phi - \Psi.$$

Lett omrokering av denne ligningen gir

$$\left(1+\frac{2}{5}f_\nu\right)\Phi=-\Psi\left(1+\frac{4}{5}f_\nu\right),$$

dvs.

$$\Phi=-\Psi\frac{1+\frac{4}{5}f_\nu}{1+\frac{2}{5}f_\nu}.$$

Dersom $f_\nu \ll 1$ (hvilket neppe er tilfellet), så kan dette forenkles til

$$\Phi=-\Psi\left(1+\frac{2}{5}f_\nu\right).$$

Poenget er uansett at fordelingsfunksjonen til de masseløse nøytrinoene har et kvadrupolmoment som vil gi korreksjoner til sammenhengen mellom Φ og Ψ. Vi vil stort sett sette $\Phi \approx -\Psi$, men i mer nøyaktige beregniner må man ta hensyn til nøytrinoene.

Hvem har skapt fluktuasjonene? Jo, ϕ på himmelen!

I AST4220 lærte vi at det er noe som heter horisontproblemet og flathetsproblemet, og at inflasjon, en fase i det veldig tidlige univers med akselerert ekspansjon drevet av et homogent skalarfelt kan løse disse problemene. Alle disse påstandene kunne og burde jeg ha skrevet mange sider om, for inflasjon har gått fra å være en spekulativ ide til ortodoks lære raskere enn sunt er. Dette kurset er imidlertid et kurs som skal oppøve dere i den rette læren, og når sant skal sies finnes det ikke så mange fornuftige alternativer til inflasjon. Vi skal derfor blindt akseptere at en slik fase fant sted og konsentrere oss om å se på en viktig konsekvens: kvantefluktuasjoner i metrikken og i skalarfeltet som driver inflasjonsfasen vil gi oss såkornene for tetthetsperturbasjoner og temperaturanisotropier.

Et par innledende tekniske bemerkninger: av årsaker som er beskrevet i boka til Dodelson er det hensiktsmessig å operere med en litt annen definisjon av konform tid i inflasjonsfasen. Vi definerer

$$\eta=\int_{t_e}^{t}\frac{dt'}{a(t')},$$

der t_e er tidspunktet da inflasjonsfasen var over. Vi ser at η fremdeles er en økende funksjon av tiden (siden a er positiv), men at $\eta(t_e)=0$, slik at $\eta<0$ mens inflasjon pågår. En skala som er mindre enn horisonten vil derfor oppfylle $k|\eta|<1$. Videre må vi venne oss til å bruke energi-impulstensoren for et skalarfelt. For å utlede uttrykket for denne, må man kunne litt feltteori, så det skal vi hoppe over. Men vi må da akseptere at for et skalarfelt $\phi=\phi(\vec{x},t)$ har vi

$$T^\alpha_\beta=g^{\alpha\nu}\phi_{,\nu}\phi_{,\beta}-g^\alpha_\beta\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}+V(\phi)\right],$$

der V er potensialet som skalarfeltet beveger seg i. I AST4220 så vi på et homogent skalarfelt $\phi = \phi^{(0)}(t)$. Hvis vi videre ser på et homogent univers slik at $g_{00} = -1$, $g_{ij} = a^2\delta_{ij}$, kan vi sjekke at uttrykket for T gir oss kjente og kjære resultater tilbake. Vi kan for eksempel se på 00-komponenten:

$$\begin{aligned} T^{(0)\alpha}_{\beta} &= g^{\alpha\nu}\phi^{(0)}_{,0}\delta_{\nu 0}\phi^{(0)}_{,0}\delta_{\beta 0} - g^{\alpha}_{\beta}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi^{(0)}_{,0}\delta_{\mu 0}\phi^{(0)}_{,0}\delta_{\nu 0} + V(\phi^{(0)})\right] \\ &= g^{00}(\phi^{(0)}_{,0})^2 - g^0_0\left[\frac{1}{2}g^{00}(\phi^{(0)}_{,0})^2 + V(\phi^{(0)})\right]. \end{aligned}$$

Siden $g^{00} = g_{00} = -1$ og $g^0_0 = g^{0\mu}g_{\mu 0} = g^{00}g_{00} = +1$, får vi

$$\begin{aligned} T^{(0)0}_0 &= -(\phi^{(0)}_{,0})^2 - \left[-\frac{1}{2}(\phi^{(0)}_{,0})^2 + V(\phi^{(0)})\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi^{(0)}}{dt}\right)^2 - V(\phi^{(0)}). \end{aligned}$$

Men siden skalarfeltet er homogent, må det også være mulig å skrive energi-impulstensoren på samme form som for en perfekt væske. Da har vi $T^{(0)0}_0 = -\rho$, og da ser vi at

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi^{(0)}}{dt}\right)^2 + V(\phi^{(0)}),$$

som er et uttrykk vi kjenner igjen fra AST4220. I samme ånd kan vi finne trykket $p = T^{(0)i}_i$ (ingen sum over i her):

$$T^{(0)i}_i = -g^{i\nu}\phi^{(0)}_{,0}\delta\nu 0 \cdot 0 - g^i_i\left[\frac{1}{2}g^{00}(\phi^{(0)}_{,0})^2 + V(\phi)\right]$$

Siden $g_{ii} = a^2$ og $g^{ii} = 1/a^2$ er $g^i_i = g^{i\mu}g_{\mu i} = a^2/a^2 = 1$, så er

$$p = T^{(0)i}_i = -\left[-\frac{1}{2}(\phi^{(0)}_{,0})^2 + V(\phi^{(0)})\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi^{(0)}}{dt}\right)^2 - V(\phi^{(0)}),$$

som også er en gammel kjenning. Identiteten $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ ga oss ligningen $d\rho/dt + 3H(\rho + p) = 0$. For det homogene skalarfeltet har vi at

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{2}2\frac{d\phi^{(0)}}{dt}\frac{d^2\phi^{(0)}}{dt^2} + \frac{d\phi^{(0)}}{dt}\frac{dV}{d\phi^{(0)}} \\ \rho + p &= \left(\frac{d\phi^{(0)}}{dt}\right)^2, \end{aligned}$$

slik at

$$\frac{d\phi^{(0)}}{dt}\frac{d^2\phi^{(0)}}{dt^2} + \frac{d\phi^{(0)}}{dt}V' + 3H\left(\frac{d\phi^{(0)}}{dt}\right)^2 = 0,$$

der $V' = dV/d\phi^{(0)}$, og dermed

$$\frac{d^2\phi^{(0)}}{dt^2} + 3H\frac{d\phi^{(0)}}{dt} + V' = 0.$$

Som vanlig dodelsonifiserer vi denne ligningen ved å innføre konform tid $d\eta = dt/a$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}\\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{\dot{a}}{a^3}\frac{d}{d\eta}.\end{aligned}$$

Det gir

$$\frac{1}{a^2}\ddot{\phi^{(0)}} - \frac{\dot{a}}{a^3}\dot{\phi^{(0)}} + 3\frac{\dot{a}}{a^2}\frac{1}{a}\dot{\phi^{(0)}} + V' = 0,$$

som etter multiplikasjon med a^2 og litt ommøblering gir

$$\ddot{\phi^{(0)}} + 2aH\dot{\phi^{(0)}} + a^2V' = 0.$$

Til slutt finner vi et uttrykk for η i inflasjonsfasen. Siden H varierer lite i inflasjonsfasen (tenk på de Sitter-universet der H er konstant), så vil vi med god tilnærming ha

$$\begin{aligned}\eta &= \int_{t_e}^{t}\frac{dt}{a} = \int_{a_e}^{a}\frac{da}{a^2H}\\ &\approx \frac{1}{H}\int_{a_e}^{a}\frac{da}{a^2} = \frac{1}{H}\left(-\frac{1}{a} - \frac{1}{a_e}\right)\\ &\approx -\frac{1}{aH},\end{aligned}$$

der vi har brukt at $a_e \gg a$, siden a_e vokser eksponensielt i inflasjonsfasen.

Et kvantemekanisk intermezzo

Vi har behandlet feltet ϕ som en klassisk størrelse. Den store åpenbaringen som venter på oss er at om vi ser på kvantefluktuasjonene i ϕ, så kan vi forstå hvordan tetthetsperturbasjoner kan oppstå i universet. Men hvorfor i alle dager skal vi kvantisere ϕ? Det lettvinte svaret er 'hvorfor ikke?' Det er *alltid* riktig å kvantisere, så det er heller synspunktet at feltet kan behandles klassisk som krever et forsvar. Men vi kan også prøve oss på en litt mindre sleip forklaring. Vi kan tenke oss at vi fourierutvikler feltet ϕ i moder med bølgetall k. Hver mode k svarer da til en planbølge med bølgelengde $2\pi/k$. For å gjøre ting enkelt kan vi se på et skalarfelt med potensial $V = m^2\phi^2/2$, som svarer til en spinn-0-partikkel med masse m (men resonementet kan generaliseres til andre V-er). Det er da en kvantemekanisk lengdeskala assosiert med partikkelen gitt ved Comptonbølgelengden

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{mc},$$

der jeg for anledningen har gått vekk ifra å bruke enheter der $\hbar = c = 1$. Kvanteeffekter forventes å være betydelige for en mode k av feltet hvis $\lambda \sim \lambda_C$, som gir

$$k \sim \frac{2\pi}{\hbar} mc.$$

I AST4220 så vi på et eksempel med et slikt felt. Vi fant at vi kunne få en brukbar inflasjonsmodell der vi unngikk energitettheter på Planckskalanivå dersom massen til feltet var mindre enn $10^{-5} M_{\rm Pl}$, der $M_{\rm Pl}$ er Planckmassen. La oss sette $m = 10^{-6} M_{\rm Pl}$ her. Da blir

$$k \sim 10^{-6} \frac{1}{l_{\rm Pl}} \sim 10^{-63} \text{ Mpc},$$

der $l_{\rm Pl}$ er Plancklengden. Etterhvert som universet utvider seg, vil en mode bli strukket proporsjonalt med skalafaktoren. Typiske moder svarende til lengdeskalaer vi kan se i dag har $k \sim 10^{-2}$ Mpc (mer om dette senere i kurset). Det betyr at da skalafaktoren var en faktor $10^{-63}/10^{-2} = 10^{-61}$ mindre enn i dag, var den påvirket av kvantemekaniske effekter. Dersom inflasjon skal gjøre jobben sin, må skalafaktoren vokse med minst e^{60} i løpet av denne fasen, og i typiske inflasjonsmodeller vokser den mye mer. Det er derfor ikke urimelig å forvente at vi i inflasjonsfasen var i en situasjon der kvanteeffekter var betydelige på lengdeskalaer som svarer til de vi kan observere i storskalastrukturen til universet i dag.

Vi er enige om at ϕ må kvantiseres. Da kan det være på sin plass å reptere litt kvantemekanikk først. La oss starte med såkalt bølgemekanikk i én dimensjon. Bølgemekanikken bygger på noen postulater. Det ligger i sakens natur at du bare må godta postulatene. De er hellige og uangripelige. Grusomme ting vil skje med deg dersom du stiller spørsmålstegn ved dem. Du er advart. Alle senere resultater er tuftet på disse postulatene. De er:

1. Observerbare størrelser i klassisk mekanikk blir i bølgemekanikken til lineære differensialoperatorer. Observerbare størrelser er typisk funksjoner av posisjonen x og bevegelsesmengden p (og muligens tiden t): $F = F(x, p)$. Vi lager en operator av den ved bytte ut x med $\hat{x} = x$ (med andre ord: vi gjør ingenting med den) og p med $\hat{p} = -i\hbar d/dx$:

$$\hat{F} = F(\hat{x}, \hat{p}) = F\left(x, -i\hbar \frac{d}{dx}\right).$$

Operatorene vi ser på i bølgemekanikken er lineære. Det betyr at for to operatorer $\hat{A}$ og $\hat{B}$, to komplekse tall a og b, og to generelle tilstander $\Psi(x,t)$ og $\Phi(x,t)$ har vi at

$$(a\hat{A} + b\hat{B})\Psi = a\hat{A}\Psi + b\hat{B}\Psi,$$

$$\hat{A}(a\Psi) = a\hat{A}\Psi,$$

og

$$\hat{A}(a\Psi + b\Phi) = a\hat{A}\Psi + b\hat{A}\Phi.$$

2. Systemets tilstand er beskrevet av bølgefunksjonen $\Psi(x,t)$ som oppfyller Schrödingerligningen
$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi,$$
der $\hat{H} = H(\hat{x},\hat{p})$, og H er den såkalte Hamiltonfunksjonen til systemet. For alle praktiske formål er denne funksjonen ganske enkelt lik energien til systemet, uttrykt ved p og x. For eksempel, for en partikkel som beveger seg i en dimensjon i et potensial $V(x)$ er
$$H(p,x) = \frac{1}{2m}p^2 + V(x),$$
og Hamiltonoperatoren blir da
$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x).$$

3. Sannsynligheten for å vinne partikkelen i intervallet (a,b) på x-aksen ved tid t er gitt ved
$$\int_a^b \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx.$$
Sannsynligheten for at partikkelen skal være et eller annet sted må være lik 1, så vi jobber med tilstander som er slik at
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = 1.$$
Vi sier at Ψ er *normert*.

4. Dersom $\hat{F}$ er operatoren som svarer til en observerbar størrelse, så er de eneste verdiene vi kan få dersom vi måler verdien av F gitt ved egenverdiene f_n til operatoren $\hat{F}$:
$$\hat{F}\psi_n(x,t) = f_n\psi_n(x,t).$$
Her er $\psi_n(x,t)$ egenfunksjonen tilhørende egenverdien f_n. Etter at vi har målt F og funnet for eksempel verdien f_n, så vil systemet etter målingen være i tilstanden ψ_n, uansett hvilken tilstand den var i før målingen.

5. Dersom systemet ikke er i en egentilstand for operatoren $\hat{F}$, har F ingen bestemt verdi, men vi kan snakke om forventingsverdien for operatoren i en generell tilstand Ψ. Denne er gitt ved
$$\langle\hat{F}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*\hat{F}\Psi dx.$$

At klassiske størrelser erstattes med operatorer betyr blant annet at det ikke lenger er slik at det er det samme hvilken rekkefølge de opptrer i: $\hat{x}\hat{p}$ er ikke nødvendigvis det samme som $\hat{p}\hat{x}$. Vi innfører *kommutatoren* mellom to operatorer $\hat{A}$ og $\hat{B}$ ved

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

Du kan selv sjekke at vi har kommutatorreglene

$$[\hat{B}, \hat{A}] = -[\hat{A}, \hat{B}],$$

$$[c\hat{A}, \hat{B}] = c[\hat{A}, \hat{B}],$$

der c er en konstant (som godt kan være et komplekst tall), og

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{A}.$$

En fundamental kommutator er den som gjelder mellom $\hat{x}$ og $\hat{p}$. Lar vi $[\hat{x}, \hat{p}]$ virke på en generell bølgefunksjon $\Psi(x,t)$, har vi

$$\begin{aligned}
[\hat{x}, \hat{p}]\Psi(x,t) &= (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\Psi(x,t) \\
&= \left(-i\hbar x \frac{d}{dx} + i\hbar \frac{d}{dx} x\right)\Psi(x,t) \\
&= -i\hbar x \frac{d\Psi}{dx} + i\hbar \frac{d}{dx}(x\Psi) \\
&= -i\hbar x \frac{d\Psi}{dx} + i\hbar x \frac{d\Psi}{dx} + i\hbar\Psi \\
&= i\hbar\Psi
\end{aligned}$$

og siden Ψ er helt generell kan vi skrive dette som

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Vi ser at operatoren $\hat{p}$ inneholder den imaginære enhenten i, og dermed vil fysiske størrelser som er bygd opp av $\hat{x}$ og $\hat{p}$ generelt være komplekse operatorer. Fysiske størrelser må ha reelle egenverdier og forventningsverdier. Dette er garantert dersom alle operatorer som svarer til fysiske størrelser er *hermiteske*. Det betyr formelt at

$$\int \Psi^* \hat{F} \Phi dx = \int \Phi \hat{F}^* \Psi^*,$$

for alle bølgefunksjoner Ψ og Φ. Dersom Φ er hermitesk, kan vi skrive det som $\hat{F}^\dagger = \hat{F}$. Dersom Ψ varierer med tiden, vil forventingsverdien til en operator $\hat{F}$ i denne tilstanden også variere i tiden. For en hermitesk operator $\hat{F}$ finner vi ved å bruke Schrödingerligningen og dens komplekskonjugerte at

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle F\rangle &= \frac{d}{dt}\int \Psi^* \hat{F} \Psi dx \\
&= \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \hat{F} \Psi dx + \int \Psi^* \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \Psi dx + \int \Psi^* \hat{F} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{\hbar}\int \Psi^* \hat{H}(\hat{F}\Psi)dx - \frac{i}{\hbar}\int \Psi^* \hat{F}(H\Psi)dx + \langle\frac{\partial \hat{F}}{\partial t}\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\int \Psi^*(\hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H})\Psi dx + \langle\frac{\partial \hat{F}}{\partial t}\rangle \\
&= \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{F}] + \langle\frac{\partial \hat{F}}{\partial t}\rangle.
\end{aligned}
$$

Dersom $\hat{F}$ ikke er eksplisitt tidsavhengig er $\partial\hat{F}/\partial t = 0$, og dersom $[\hat{H},\hat{F}] = 0$ ser vi da at forventingsverdien av F er konstant. Et spesielt interessant sett av tilstander er de som er egentilstander for en gitt Hamiltonoperator $\hat{H}$ som ikke er eksplisitt tidsavhengig. For slike tilstander kan vi skrive $\Psi(x,t) = \psi(x)f(t)$, og innsatt i Schrödingerligningen gir dette

$$
i\hbar\psi(x)\frac{df}{dt} = f(t)\hat{H}\psi(x),
$$

slik at vi må ha

$$
i\hbar\frac{df/dt}{f} = \frac{\hat{H}\psi}{\psi} = E = \text{konstant},
$$

siden venstresiden er en funksjon av tiden alene og høyresiden er en funksjon av x alene. Ligningen for f gir $f = \exp(-iEt/\hbar)$, mens ψ må oppfylle egenverdiligningen

$$
\hat{H}\psi(x) = E\psi(x).
$$

En slik tilstand kalles ofte for en stasjonær tilstand.

Dette var veldig formelt. Det er på tide med et eksempel. Vi skal se på det eneste systemet vi trenger å kjenne til i det vi skal gjøre videre: den harmoniske oscillator. I klassisk fysikk kan en harmonisk oscillator være, for eksempel, en kloss som er festet til en stiv fjær. Men systemet er viktigere enn som så, for det kan vises at ethvert system som har en potensiell energi med en minimumsverdi kan tilnærmes med en harmonisk oscillator for små avvik fra minimumet i potensialet. Hamiltonfunksjonen (energien) for en harmonisk oscillator er gitt ved

$$
H(p,x) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,
$$

som gir den kvantemekaniske Hamiltonoperatoren

$$
\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.
$$

De stasjonære tilstandene er bestemt av at

$$
\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x),
$$

og man kan med mye strev og slit vise at

$$
\begin{aligned}
E_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \\
\psi_n(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right),
\end{aligned}
$$

der $n = 0, 1, 2, \ldots$ og n er det $n$te Hermitepolynomet. Spesielt har vi at $H_0 = 1$. Den laveste energien systemet kan ha, grunntilstanden, ser vi er for $n = 0$ og er gitt ved $E_0 = \hbar\omega/2$. Merk at denne er større enn null. Klassisk sett er er energien til systemet alltid ikke-negativ, siden den er gitt som summen av to kvadratiske ledd. Men klassisk er det tillatt at energien er lik null: det svarer til at partikkelen er i ro i origo. Kvantemekanisk er denne situasjonen umulig, den minste energien systemet kan ha er $\hbar\omega/2$. Denne energien kalles ofte for *nullpunktsenergien* eller *vakuumenergien*, og grunntilstanden kan også kalles for *vakuumtilstanden*. Vi ser ofte at $n = 0, 1, 2, \ldots$ svarer til at vi har henholdsvis ingen, en, to osv. kvanter til stede. For å bli mer fortrolige med systemet, kan vi regne litt på egenskapene til grunntilstanden. Siden $H_0 = 1$ er denne gitt ved

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right).$$

Vi kan først sjekke at dette virkelig er en løsning av egenverdiproblemet for $\hat{H}$. Det er lett å regne ut at

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_0}{dx} &= -\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0(x), \\
\frac{d^2\psi_0}{dx^2} &= -\frac{m\omega}{\hbar}\psi_0 + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\psi_0.
\end{aligned}$$

Da ser vi at

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi_0 &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)\psi_0 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2}\psi_0 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_0 \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_0 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_0 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_0 \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_0,
\end{aligned}$$

som viser at ψ_0 er en egenfunksjon for $\hat{H}$ med egenverdi $E_0 = \hbar\omega/2$. Vi fortsetter moroa med å regne ut noen forventningsverdier i grunntilstanden (siden jeg også kaller grunntilstanden for vakuumtilstanden, kan disse forventningsverdiene kalles vakuumforventningsverdier). La oss starte med x:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\psi_0^*(x)x\psi_0(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx x e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} = 0,$$

siden integranden er antisymmetrisk om origo mens integrasjonsområdet er symmetrisk om origo. Vi fortsetter med x^2:

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\psi_0^*(x)x^2\psi_0(x) \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} du u^2 e^{-u^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\hbar}{m\omega} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}.
\end{aligned}
$$

Med andre ord: i grunntilstanden er partikkelens midlere posisjon lik null, men den fluktuerer rundt denne posisjonen (siden $\langle x^2 \rangle \neq 0$).

Vi har til nå betraktet bølgefunksjonen som en funksjon av partikkelens posisjon x. Det er det vi er vant til, men det er ingenting som sier at vi må gjøre det slik. Det går også an å bruke bevegelsesmengden p som koordinat og skrive bølgefunksjonen som $\phi(p)$. De to beskrivelsene $\psi(x)$ og $\phi(p)$ er forbundet ved en Fouriertransformasjon:

$$
\begin{aligned}
\phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \psi(x) \\
\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ipx/\hbar} \phi(p).
\end{aligned}
$$

Om vi bruker $\phi(p)$ i stedet for $\psi(x)$, så må vi også sette $\hat{p} = p$ og $\hat{x} = i\hbar \frac{d}{dp}$. Dette gidder jeg ikke å vise, men vi skal se ved et eksempel at dette fungerer. La oss finne ut hva $\phi(p)$ for grunntilstanden til oscillatoren er:

$$
\begin{aligned}
\phi_0(p) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 - \frac{ip}{\hbar}x}.
\end{aligned}
$$

Eksponenten kan vi skrive som

$$
\begin{aligned}
-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 - \frac{ip}{\hbar}x &= -\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{2i}{m\omega}px\right) \\
&= -\frac{m\omega}{2\hbar}\left[\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2}\right] \\
&= -\frac{p^2}{2\hbar m\omega} - \frac{m\omega}{2\hbar}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Dermed har vi

$$
\phi_0(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)^2}.
$$

For å regne ut integralet kan vi starte med å se på integralet av funksjonen $f(x) = e^{-az^2}$, der a er en reell, positiv konstant, rundt en lukket kurve i det komplekse plan. Siden $f(z)$ er analytisk overalt, vil et slikt integral i henhold til Cauchys teorem alltid være lik null. Vi velger å la den lukkede kurven C bestå av veien fra $-R$ til R langs den reelle aksen, fra $-R$ til $R+ib$, fra $R+ib$ til $-R+ib$, og til slutt fra $-R+ib$ tilbake til $-R$. Lar vi $z = x+iy$, der x og y er reelle tall, kan vi da skrive

$$\int_C dz e^{-az^2} = \int_{-R}^{R} dx e^{-ax^2} + \int_0^b dy e^{-a(R+iy)^2} + \int_R^{-R} dx e^{-a(x+ib)^2} + \int_b^0 dy e^{-a(-R+iy)^2} = 0,$$

som etter litt finpussing blir til

$$\int_{-R}^{R} dx e^{-ax^2} - \int_{-R}^{R} dx e^{-a(x+ib)^2} + e^{-aR^2} \left(\int_0^b dy e^{ay^2-2iaRy} - \int_0^b dy e^{ay^2+2iaRy} \right) = 0.$$

Lar vi $R \to \infty$ vil det siste leddet gå mot null, og vi står igjen med

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-a(x+ib)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2},$$

og det siste integralet er kjent: det har verdien $\sqrt{\pi/a}$. Dermed finner vi at

$$\phi_0(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}} e^{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}} = \frac{1}{(\pi\hbar m\omega)^{1/4}} e^{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}}.$$

Vi kan sjekke at ϕ_0 er normert riktig:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp \phi_0^*(p)\phi_0(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar m\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{\hbar m\omega}} dp = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar m\omega}} \sqrt{\pi\hbar m\omega} = 1.$$

Vi kan også regne ut forventningsverdien av x og x^2 for å sjekke at vi får det samme resultatet som da vi brukte $\psi_0(x)$. Husk at nå er $\hat{x} = i\hbar\frac{d}{dp}$, så vi har bruk for

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}\phi_0(p) &= -\frac{p}{\hbar m\omega}\phi_0(p) \\
\frac{d^2}{dp^2}\phi_0(p) &= -\frac{1}{\hbar m\omega}\phi_0(p) + \frac{p^2}{\hbar^2 m^2\omega^2}\phi_0(p).
\end{aligned}$$

Da går resten som en lek:

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \phi_0^*(p) \left(i\hbar\frac{d}{dp}\right) \phi_0(p) \\
&= -\frac{i\hbar}{\hbar m\omega} \frac{1}{\sqrt{\pi m\hbar\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp p e^{-\frac{p^2}{\hbar m\omega}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

og

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{x}^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \phi_0^*(p) \left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dp^2} \right) \phi_0(p) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \phi_0^*(p) \left(\frac{\hbar}{m\omega} \phi_0(p) - \frac{p^2}{m\omega^2} \phi_0(p) \right) \\
&= \frac{\hbar}{m\omega} - \frac{1}{m^2\omega^2} \frac{1}{\sqrt{\pi \hbar m \omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp p^2 e^{-\frac{p^2}{\hbar m\omega}} \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}.
\end{aligned}
$$

Dette er indisier som peker i retning av at det ikke spiller noen rolle om vi bruker $\psi_0(x)$ eller $\phi_0(p)$ til å beskrive systemets tilstand: så lenge vi bruker kokeboka riktig, får vi de samme resultatene når vi regner ut forventningsverdier av fysiske størrelser, uansett hvilken beskrivelse vi bruker. Vi kan se på tilstanden til systemet som en vektor i et vektorrom (det såkalte Hilbertrommet), og x- og p-beskrivelsen som to forskjellige valg av basisvektorer for dette rommet. Beskrivelsen med $\phi_0(x)$ svarer til å uttrykke tilstanden i x-basisen, mens $\phi_0(p)$ svarer til å skrive tilstanden i p-basisen. Det er da mulig å snakke om systemets tilstand uten å referere til noen bestemt basis, og notasjonen som da brukes er $|\psi_0\rangle$ (dette kalles en 'ket'). Dette er dessverre ikke den rette anledningen til å gjennomgå hvordan det med dette utgangspunktet kan gis en såkalt abstrakt formulering av kvantemekanikken, men noen viktige detaljer som vi trenger er:

1. Til enhver ket $|\psi\rangle$ svarer en vektor i et dualt vektorrom, en såkalt 'bra', som skrives $\langle\psi|$.

2. Vi kan innføre skalarproduktet mellom to tilstander $|\psi\rangle$ og $|\phi\rangle$. Det er det komplekse tallet som skrives

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*$$

   og i bølgefunksjonsnotasjon svarer dette til

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^*(x)\phi(x).$$

   At $\psi_0(x)$ for oscillatoren er normert svarer i denne notasjonen til at $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 1$. Mattefreakene blant oss kan legge merke til at mens $|\psi\rangle$ er vektorer i et Hilbertrom, så er $\langle\psi|$ en lineær avbildning fra Hilbertrommet til de komplekse tallene.

3. Bølgefunksjonene $\psi_0(x)$ og $\phi_0(p)$ skrives i denne notasjonen som $\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$ og $\phi_0(p) = \langle p|\psi_0\rangle$.

4. Forventningsverdien til en operator $\hat{F}$ i en tilstand $|\psi\rangle$ skrives

$$\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle.$$

Med denne mere abstrakte formuleringen av kvantemekanikken kan vi finne en elegant løsning av harmonisk oscillator-problemet. Denne løsningen er svært relevant når vi omsider vender tilbake til inflasjonsfasen, så det er verdt bryet å se på den. Hamiltonoperatoren for en endimensjonal harmonisk oscillator var

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

Vi innfører nå en ny operator

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}.$$

Dens hermitesk konjugerte er da

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p},$$

siden både $\hat{x}$ og $\hat{p}$ er hermiteske operatorer: $\hat{x}^\dagger = \hat{x}$ og $\hat{p}^\dagger = \hat{p}$. La oss starte med å regne ut en kommutator:

$$\begin{aligned}
[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}, \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right] \\
&= -i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{1}{2m\hbar\omega}}[\hat{x}, \hat{p}] + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{1}{2m\hbar\omega}}[\hat{p}, \hat{x}] \\
&= -\frac{i}{2\hbar}i\hbar + \frac{i}{2\hbar}(-i\hbar) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Selve motivasjonen for å innføre denne operatoren ser vi hvis vi regner ut $\hat{a}^\dagger\hat{a}$:

$$\begin{aligned}
\hat{a}^\dagger\hat{a} &= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right) + \frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}] \\
&= \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

dvs.

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right).$$

Da kan vi videre regne ut et par kommutatorer til:

$$\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{a}] &= \hbar\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] \\
&= \hbar\omega\hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a} + \hbar\omega[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{a} \\
&= -\hbar\omega\hat{a},
\end{aligned}$$

og

$$
\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] &= \hbar\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \\
&= \hbar\omega\hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + \hbar\omega[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger]\hat{a} \\
&= \hbar\omega\hat{a}^\dagger.
\end{aligned}
$$

La oss kalle egentilstandene for $\hat{H}$ for $|n\rangle$, og la egenverdiene være E_n:

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle.$$

Vi har nå at

$$[\hat{H}, \hat{a}]|n\rangle = -\hbar\omega\hat{a}|n\rangle.$$

Venstresiden blir

$$(\hat{H}\hat{a} - \hat{a}\hat{H})|n\rangle = \hat{H}(\hat{a}|n\rangle) - E_n(\hat{a}|n\rangle),$$

og dermed får vi at

$$\hat{H}(\hat{a}|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)(\hat{a}|n\rangle).$$

Med andre ord: dersom $|n\rangle$ er en egentilstand for $\hat{H}$ med egenverdi E_n, så er $\hat{a}|n\rangle$ en egentilstand for $\hat{H}$ med egenverdi $E_n - \hbar\omega$, forutsatt at $\hat{a}|n\rangle \neq 0$. Vi kan da fortsette med å se på tilstanden $\hat{a}^2|n\rangle$. Forutsatt at den ikke er lik null, vil vi finne at den er en egenverdi for $\hat{H}$ med egenverdi $E_n - 2\hbar\omega$. Og slik kan vi forsette, men ikke i det uendelige. Energien må nemlig være ikke-negativ, siden $\hat{H}$ er summen av to kvadratiske ledd. Det betyr at prosessen må stoppe før vi ender opp med en negativ energiegenverdi, og for at den skal stoppe må det finnes en tilstand $|0\rangle$ slik at $\hat{a}|0\rangle = 0$. Denne tilstanden, som vi kan kalle grunntilstanden eller vakuumtilstanden, oppfyller

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle.$$

Med andre ord svarer tilstanden $|0\rangle$ til $\psi_0(x)$ i bølgemekanikkformuleringen av problemet. Denne tilstanden må vi nå fra enhver egentilstand for $\hat{H}$ i skritt på $\hbar\omega$. Det betyr at energiegenverdiene kan skrives på formen $(n + 1/2)\hbar\omega$ der n er et helt tall. Kaller vi den $n$te energiegentilstanden for $|n\rangle$, så har vi at

$$
\begin{aligned}
\hat{H}|n\rangle &= E_n|n\rangle \\
E_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,
\end{aligned}
$$

der $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vi har med andre ord funnet egenverdiene til Hamiltonoperatoren uten å løse noen diffligning slik vi måtte ha gjort i bølgemekanikken. Vakkert! Der er imidlertid flere morsomme ting vi kan gjøre. Bruker vi kommutatoren $[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger$ på tilstanden $|n\rangle$, ser vi at

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger|n\rangle - \hat{a}^\dagger\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\hat{a}^\dagger|n\rangle,$$

som gir

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger|n\rangle) = (E_n + \hbar\omega)(\hat{a}^\dagger|n\rangle).$$

Det betyr at dersom vi starter fra vakummtilstanden $|0\rangle$, så kan vi nå høyere energiegentilstander ved gjentatt bruk av $\hat{a}^\dagger$. Siden $\hat{a}$ fjerner et oscillatorkvant og $\hat{a}^\dagger$ legger til et, kalles disse operatorene ofte for henholdsvis annihilasjons- og kreasjonsoperatorer. At vi fra tilstanden $|n\rangle$ ved anvendelse av $\hat{a}^\dagger$ får en tilstand med egenverdi E_{n+1} betyr at

$$|n+1\rangle = c_n \hat{a}^\dagger |n\rangle,$$

der c_n er en normeringskonstant. Det kan vises at bra'en som svarer til $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ er $\langle n|\hat{a}$, slik at vi har

$$\langle n+1|n+1\rangle = |c_n|^2 \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle.$$

Fra $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ følger $\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}\hat{a}^\dagger - 1$, og

$$\frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2},$$

slik at

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}.$$

Dermed blir

$$\langle n+1|n+1\rangle = |c_n|^2 \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \langle n|n\rangle.$$

Vi antar at vi har ordnet oss slik at alle tilstandene $|n\rangle$ er normerte. Det betyr at

$$1 = |c_n|^2(n+1),$$

slik at

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

på en kompleks fasefaktor nær. Dermed har vi vist at

$$|n+1\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n+1}}|n\rangle,$$

og et øyeblikks ettertanke overbeviser oss om at vi generelt kan skrive

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle.$$

Fra regningen over følger det også at

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,$$

og på tilsvarende måte kan man vise at

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

Hvis vi oversetter operatorene og tilstandene til bølgemekanikkrepresentasjonen, kan vi finne grunntilstanden $\psi_0(x)$ på en enkel måte. Definisjonen $\hat{a}|0\rangle$ blir til

$$\left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\right]\psi_0(x) = 0,$$

som gir diffligningen

$$\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} = -\frac{m\omega}{\hbar}x,$$

med løsning

$$\psi_0(x) = Ce^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2},$$

der C er en integrasjonskonstant som vi kan bestemme ved å kreve at ψ_0 skal være normert. Gjør vi det, får vi tilbake vår gamle $\psi_0(x)$. Det artige nå er at vi kan lage de eksiterte tilstandene fra ψ_0 ved å bruke $\hat{a}^\dagger$ på bølgemekanikkformen. Enhver som har slitt seg gjennom standardløsningen av harmonisk oscillator i bølgemekanikkrepresentasjonen vil fryde seg over denne elegante løsningen av problemet. Men det er ingen grunn til at vi skal bruke tid på å konstruere $\psi_n(x)$. Vi kan for eksempel regne ut alle forventningsverdier vi er interesserte i med den mer abstrakte notasjonen. Det eneste vi trenger å vite er at $\hat{a}|0\rangle = 0$, $\langle 0|\hat{a} = 0$, og at $\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = 1$. Det siste kan vi lett vise ved å bruke at $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$:

$$\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = \langle 0|0\rangle,$$

som gir

$$\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle + 0 = 1.$$

Vi kan for eksempel regne ut forventningsverdiene av x og x^2 i grunntilstanden igjen. Fra definisjonene av $\hat{a}$ og $\hat{a}^\dagger$ følger det at

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger).$$

Da finner vi

$$\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 0|\hat{a} + \hat{a}^\dagger|0\rangle = 0,$$

og

$$\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|\hat{a}\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega},$$

akkurat som før.

Til slutt vender vi tilbake til Schrödingerligningen, som i ket-bra-notasjon kan skrives

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle.$$

Vi kan innføre en tidsutviklingsoperator $\hat{U}(t, t_0)$ som bringer tilstanden fra det faste tidspunktet t_0 til tidspunktet t. For enkelhets skyld vil jeg i det følgende velge $t_0 = 0$ og skrive $\hat{U}$ som $\hat{U}(t)$. Vi har da pr. def.

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle.$$

Setter vi dette inn i Schrödingerligningen, finner vi at $\hat{U}$ må oppfylle

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U} = \hat{H}\hat{U},$$

og dersom $\hat{H}$ ikke er eksplisitt avhengig av tiden kan vi integrere opp denne ligningen og finne

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{it}{\hbar}\hat{H}},$$

der eksponensialfunksjonen av en operator er definert ved å bruke rekkeutviklingen:

$$e^{\hat{A}} \equiv 1 + \hat{A} + \frac{1}{2!}\hat{A}\hat{A} + \cdots.$$

Forventningsverdien av en fysisk størrelse F kan vi da skrive som

$$\langle\hat{F}\rangle = \langle\Psi(t)|\hat{F}|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(0)|\hat{U}^\dagger(t)\hat{F}\hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle,$$

som er lik forventningsverdien av den tidsavhengige operatoren $\hat{F}(t) = \hat{U}^\dagger\hat{F}\hat{U}$ i den tidsuavhengige tilstanden $|\Psi(0)\rangle$. Det er med andre ord opp til oss om vi vil bruke tidsuavhengige operatorer og tidsavhengige tilstander eller omvendt. Det første kalles Schrödingerbildet, det andre Heisenbergbildet. I Heisenbergbildet er det altså operatorene som varierer i tiden. Vi har da at

$$\hat{F}(t)\hat{U}^\dagger(t)\hat{F}\hat{U}(t).$$

Ligningen som vi fant for tidsutviklingen til forventningverdien av en operator (se begynnelsen av dette avsnittet om kvantemekanikk) blir nå erstattet av en ligning for tidsutviklingen til operatoren. Den finner vi ved å derivere ligningen over med hensyn på tiden og så bruke

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U} &= \hat{H}\hat{U} \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}^\dagger &= (\hat{H}\hat{U})^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{H}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{H}. \end{aligned} \tag{12}$$

Det er da rett fram å vise at

$$\frac{\partial\hat{F}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\hat{U}^\dagger[\hat{H},\hat{F}]\hat{U},$$

der $\hat{F}$ som inngår i kommutatoren er $\hat{F}(0)$. La oss ta en siste titt på hvordan dette funker for en harmonisk oscillator. Med $\hat{F}(0) = \hat{x}$ får vi at

$$[\hat{H},\hat{x}] = \frac{1}{2m}[\hat{p}^2,\hat{x}] = -\frac{i\hbar}{m}\hat{p},$$

slik at vi får operatorligningen

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \frac{i}{\hbar}\left(-\frac{i\hbar}{m}\right)\hat{U}^\dagger(t)\hat{p}\hat{U}(t) = \frac{1}{m}\hat{p}(t).$$

Videre er

$$[\hat{H}, \hat{p}] = \frac{1}{2} m\omega^2 [\hat{x}^2, \hat{p}] = i\hbar m\omega^2 \hat{x},$$

slik at

$$\frac{d}{dt}\hat{p}(t) = \frac{i}{\hbar} i\hbar m\omega^2 \hat{U}^\dagger(t)\hat{x}\hat{U}(t) = -m\omega^2 \hat{x}(t).$$

Men fra den første ligningen har vi at

$$\hat{p}(t) = m\frac{d\hat{x}(t)}{dt},$$

slik at

$$m\frac{d^2\hat{x}(t)}{dt^2} = -m\omega^2\hat{x}(t),$$

eller

$$\frac{d^2\hat{x}(t)}{dt^2} + \omega^2\hat{x}(t) = 0,$$

som vi kjenner igjen som den klassiske bevegelsesligningen for oscillatoren. Den tidsavhengige kvantemekaniske operatoren for partikkelens posisjon oppfyller med andre ord den klassiske bevegelsesligningen for partikkelen! En alternativ framgangsmåte for å kvantisere oscillatoren er da å ta utgangspunkt i den klassiske bevegelsesligningen, forfremme den til ligningen for den tidsavhengige operatoren $\hat{x}(t)$, og så innføre kreasjons- og destruksjonsoperatorer ved å skrive

$$\hat{x}(t) = v(\omega, t)\hat{a} + v^*(\omega, t)\hat{a}^\dagger,$$

der v ved innsetting viser seg å oppfylle den klassiske bevegelsesligningen, og vi kan velge å skrive løsningen som

$$v(\omega, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}.$$

Det er denne fremgangsmåten som er mest praktisk i det følgende, siden vi allerede har utledet klassiske bevegelsesligninger for feltene vi vil kvantisere, h og ϕ.

Tensorperturbasjoner

Perturbasjonene i skalarfeltet ϕ kobler til de skalare perturbasjonene i metrikken, Φ og Ψ. Det krever derfor litt omtanke å håndtere disse. Vi starter derfor med å se på tensorperturbasjonene, siden disse i lys av frakoblingsteoremet ikke kobler til skalare perturbasjoner. Det eneste som kunne ha ødelagt for oss ville være om skalarfeltet bidro til $\delta T^1_1 - \delta T^2_2$ til første orden, siden utledningen av ligningen for tensorperturbasjonene bygget på at denne differensen var lik 0. Men siden uttrykket for energi-impulstensoren for skalarfeltet gir oss at

$$\begin{aligned} T^1_1 &= g^{1\nu}\phi_{,\nu}\phi_{,1} - g^1_1\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + V(\phi)\right] \\ &= -g^1_1\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + V(\phi)\right], \end{aligned}$$

siden $\phi_{,1}$ er av første orden i perturbasjonene, og derfor alle bidrag til det første leddet enten er av høyere orden eller lik null p.g.a. $g^{1\nu} = 0$. Tilsvarende har vi at

$$T_2^2 = -g_2^2 \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + V(\phi) \right],$$

og da $g_1^1 = g_2^2$ får vi at $\delta T_1^1 - \delta T_2^2 = 0$. Dermed kan vi trygt bruke den gode, gamle ligningen for tidsutviklingen til tensorperturbasjonene

$$\ddot{h} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} + k^2 h = 0.$$

Vi husker at h er betegner en Fouriermode med bølgetall k av tensorperturbasjonene. Vi har nå veldig lyst til å kvantisere denne ligningen, for det er vi enige om at det kan være lurt å gjøre hvis vi befinner oss i inflasjonsfasen. Men vi har bare lært hvordan vi skal kvantisere en oscillator, og ligningen over ser ikke helt ut som en oscillatorligning. Det kan vi imidlertid fikse på ved å innføre en ny variabel (hurra!)

$$\tilde{h} = \frac{ah}{\sqrt{16\pi G}},$$

og du får ikke lov til å spørre meg om hvorfor normeringen er valgt akkurat slik. Denne nye variabelen gir oss at

$$\begin{aligned}
\frac{h}{\sqrt{16\pi G}} &= \frac{\tilde{h}}{a} \\
\frac{\dot{h}}{\sqrt{16\pi G}} &= \frac{\dot{\tilde{h}}}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2}\tilde{h} \\
\frac{\ddot{h}}{\sqrt{16\pi G}} &= \frac{\ddot{\tilde{h}}}{a} - 2\frac{\dot{a}}{a^2}\dot{\tilde{h}} - \frac{\ddot{a}}{a^2}\tilde{h} + \frac{2\dot{a}^2}{a^3}\tilde{h}.
\end{aligned}$$

Setter vi dette inn i ligningen for h, forenkler den seg etter en stund til

$$\ddot{\tilde{h}} + \left(k^2 - \frac{\ddot{a}}{a}\right)\tilde{h} = 0,$$

som ligner veldig på en oscillatorligning. Vi kvantiserer denne ved å forfremme $\tilde{h}$ til en operator, og skriver

$$\hat{\tilde{h}}(k,\eta) = v(k,\eta)\hat{a}_k + v^*(k,\eta)\hat{a}_k^\dagger,$$

der v oppfyller den klassiske bevegelsesligningen

$$\ddot{v} + \left(k^2 - \frac{\ddot{a}}{a}\right)v = 0.$$

Det er rimelig å tro at universet startet uten noen kvanter i h-oscillatoren, dvs. i vakuumtilstanden. Men erfaringen med den kvantemekaniske oscillatoren sier oss at selv om det er slik, så vil det være kvantemekaniske fluktuasjoner i h-feltet. Vi ser at

$$\langle 0|\hat{\tilde{h}}^\dagger \hat{\tilde{h}}|0\rangle = |v(k,\eta)|^2.$$

En forskjell fra tilfellet vi behandlet i forrige avsnitt er at vi nå har å gjøre med et uendelig antall uavhengige oscillatorer, en for hver verdi av k. Formelt må vi da skrive vakuumforventningsverdien av $\tilde{h}$ som

$$\langle 0|\hat{\tilde{h}}^\dagger(k,\eta)\hat{\tilde{h}}(k',\eta)|0\rangle = (2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}')|v(k,\eta)|^2.$$

Uansett, vi ser at vakuumfluktuasjonen er bestemt av funksjonen v. En siste finesse er at det er h og ikke $\tilde{h}$ vi er interesserte i. Relasjonen er imidlertid enkel:

$$\langle 0|\hat{h}^\dagger(k,\eta)\hat{h}(k',\eta)|0\rangle = \frac{16\pi G}{a^2}|v(k,\eta)|^2(2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}') \equiv (2\pi)^3\delta(\vec{k}-\vec{k}')P_h(k),$$

der vi har definert *styrkespekteret*

$$P_h(k) = 16\pi G\frac{|v(k,\eta)|^2}{a^2}.$$

Det som gjenstår er da å løse ligningen for v. Vi husker at $\eta = -1/aH$ i inflasjonsfasen, og at H er tilnærmet konstant. Da har vi at

$$\dot{a} = \frac{1}{H}\frac{1}{\eta^2} = -\frac{a}{\eta},$$

slik at $\eta\dot{a}/a \approx -1$, og

$$\frac{\ddot{a}}{a} \approx -\frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{a}{\eta}\right) = -\frac{1}{a}\left(\frac{\dot{a}}{\eta}-\frac{a}{\eta^2}\right) = \frac{1}{\eta^2}\left(1-\eta\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{2}{\eta^2}.$$

Dermed er ligningen vi skal løse

$$\ddot{v} - \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right)v = 0.$$

Veldig tidlig i inflasjonsfasen er $-\eta = 1/aH \gg 1$, slik at k^2-leddet dominerer i parentesen. Da er ligningen tilnærmet

$$\ddot{v} + k^2 v = 0,$$

som er oscillatorligningen med $\omega = k$. Vi kan da kopiere løsningen fra tidligere,

$$v(k,\eta) = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}},$$

som dermed forteller oss hvordan v bør oppføre seg i starten. Så går vi tilbake til den generelle ligningen. Vi innføerer nok en ny variabel: $v = \eta\tilde{v}$. Da er

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \tilde{v} + \eta\dot{\tilde{v}}\\ \ddot{v} &= 2\dot{\tilde{v}} + \eta\ddot{\tilde{v}}.\end{aligned}$$

Innsatt i ligningen for v finner vi at den kan skrives som

$$\ddot{\tilde{v}} + \frac{2}{\eta}\dot{\tilde{v}} + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right)\tilde{v} = 0.$$

Innføerer vi så $x = k\eta$, slik at $d/d\eta = kd/dx$ og $d^2/d\eta^2 = k^2 d^2/dx^2$, blir ligningen til

$$\frac{d^2\tilde{v}}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\tilde{v}}{dx} + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\tilde{v} = 0.$$

Det ser ikke ut som vi har oppnådd så mye, men det har vi faktisk. Denne ligningen er nemlig på samme form som den sfæriske Besselligningen

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{df}{dx} + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right] f = 0$$

med $\ell = 1$. Den generelle løsningen av denne ligningen finner man i en dertil egnet bok:

$$\tilde{v} = A j_1(x) + B y_1(x),$$

der

$$j_1(x) = -\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2},$$

og

$$y_1(x) = \frac{d}{dx}\frac{\cos x}{x} = -\frac{\cos x + x\sin x}{x^2}.$$

Setter vi inn for $x = k\eta$, kan vi skrive

$$\tilde{v} = A\frac{\sin(k\eta) - k\eta\cos(k\eta)}{(k\eta)^2} - B\frac{\cos(k\eta) + k\eta\sin(k\eta)}{(k\eta)^2}.$$

Vi har bruk for å utrykke løsningen ved $e^{\pm ik\eta}$, så vi bruker at

$$\begin{aligned}
\sin(k\eta) &= \frac{1}{2i}(e^{ik\eta} - e^{-ik\eta}) \\
\cos(k\eta) &= \frac{1}{2}(e^{ik\eta} + e^{-ik\eta}).
\end{aligned}$$

Etter enkel, men kjedelig algebra finner vi da

$$v = \eta\tilde{v} = \frac{1}{2k^2\eta}\{e^{ik\eta}[-(B+Ak\eta)+i(-A+Bk\eta)]+e^{-ik\eta}[-(B+Ak\eta)+i(A-Bk\eta)]\}.$$

Når $k|\eta| \gg 1$ ønsker vi at

$$v \approx \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}.$$

For at det skal være mulig må koeffisienten foran $e^{ik\eta}$-leddet forsvinne:

$$0 = -B - Ak\eta - iA + iBk\eta,$$

dvs.

$$k\eta(-A+iB)+i(-A+iB)=0,$$

som gir $A=iB$, dvs $B=-iA$. Setter vi dette inn for B i uttrykket for v, finner vi at

$$v=A\frac{e^{-ik\eta}}{k}\left(\frac{i}{k\eta}-1\right).$$

Siden dette uttrykket skal gå som $e{-}ik\eta/\sqrt{2k}$ for $-k\eta\gg 1$, er A bestemt av at

$$-\frac{A}{k}=\frac{1}{\sqrt{2k}},$$

dvs.

$$A=-\sqrt{\frac{k}{2}}.$$

Dermed blir den fullstendig løsningen for v

$$v(k,\eta)=\frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}\left(1-\frac{i}{k\eta}\right).$$

Vi er først og fremst interesserte i styrkespekteret slik det er når inflasjonsfasen går mot slutten. Da er $k|\eta|\ll 1$, og

$$v\approx\frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}\left(-\frac{i}{k\eta}\right).$$

Da blir styrkespekteret

$$P_h(k)=\frac{16\pi G}{a^2}|v(k,\eta)|^2=\frac{16\pi G}{a^2}\frac{1}{2k}\frac{1}{k\eta^2}.$$

Siden $\eta=1/aH$ kan dette også skrives som

$$P_h(k)=\frac{16\pi G}{a^2}\frac{1}{2k^3}a^2H^2=\frac{8\pi GH^2}{k^3}.$$

Dersom vi skal ta hensyn til at H varierer noe under inflasjonsfasen, skal vi regne ut denne når fluktuasjonen med bølgetall k forsvinner ut av horisonten, dvs. $k=aH$.