Kosmologisk perturbasjonsteori: Einsteintensoren vender tilbake

Vi har funnet Boltzmannligninger for fotoner, baryoner og mørk materie. Om vi hadde ønsket det, kunne vi også satt opp ligningene for masseløse nøytrinoer. De har den samme venstresiden (df/dt) som for fotonene, men de vekselvirker så svakt seg imellom og med omgivelsene at de kan regnes som kollisjonsløse, og dermed blir høyresiden lik null. Oppskriften for å sette opp Boltzmannligninger kan oppsummeres slik:

- Start med
$$\frac{df}{dt} = C[f].$$
- Skriv ut df/dt, regn ut de nødvendige koeffisienter foran de forskjellige leddene til 1. orden i perturbasjonene ved å bruke geodetligningen.
- For fotoner og masseløse nøytrinoer: sett inn rekkeutvikling av fordelingsfunksjonen f, bestem df/dt til 1. orden. Regn ut kollisjonsleddet til samme orden. For nøytrinoer er det lik null.
- For CDM og baryoner: ta de to laveste momentene av Boltzmannligningen, neglisjer alle ledd av orden p^2/E^2 og høyere. For baryonene er det også et kollisjonsintegral som må regnes ut.
- Skift til konform tid $d\eta = dt/a$.
- Fouriertransformer ligningene. Husk at
$$\frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow ik_i = ik^i$$
under en fouriertransformasjon.

Når vi tar med rubbel og bit av ulike komponenter, og i tillegg tar hensyn til at strålingsfeltet kan være polarisert, ender vi opp med syv ligninger med ni ukjente. Med andre ord trenger vi to nye ligninger for å lukke systemet. Hittil har vi ikke sagt noe som helst om hvordan perturbasjonene i metrikken, Ψ og Φ, utvikler seg i tiden. De to ligningene vi trenger er de som bestemmer deres tidsutvikling. Disse får vi fra Einsteinligningen. Du vet hva det betyr: en ny runde med beregninger.

Salme ved reisens begynnelse

Melodi: Postmann Pat

> Perturber! Perturber!
> Sett opp metrikken og perturber!
> Vi skal regne lenge,
> andre orden slenge,
> til vi har funnet alle ligninger!
>
> Gi meg Γ! Gi meg R!
> Da kan vi regne ut en vakker G!
> Så må vi tenke riktig,
> slite helt vanvittig,
> og få med alt som bidrat til vår T.
>
> Ble det null, eller tull?
> Føles ditt hode som et lite, sort hull?
> La din hjerne hvile,
> aldri må du tvile
> på at slitet er verdt sin vekt i gull.

Perturbert Einsteinligning

Utviklingen av Ψ og Φ er bestemt av energi-impulstensoren $T^{\mu\nu}$ gjennom $G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$. Strategien er i prinsippet enkel: vi regner ut venstresiden og høyresiden til første orden i perturbasjonene. Jeg minner om at metrikken er gitt ved

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 - 2\Psi(\vec{x}, t) \\ g_{0i} &= 0 \\ g_{ij} &= a^2(t)\delta_{ij}[1 + 2\Phi(\vec{x}, t)]. \end{aligned}$$

Vi må regne ut Einsteintensoren, hvilket betyr at vi først må regne ut Christoffelsymbolene, deretter Riccitensoren, så Ricciskalaren, før vi endelig er de lykkelige eiere av en Einsteintensor.

Vi starter med $\Gamma^0_{\mu\nu}$. For å spare litt skriving bruker jeg notasjonen $\partial/\partial x^\mu =_{,\mu}$.

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{0\alpha}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) = \frac{-1 + 2\Psi}{2}(g_{0\mu,\nu} + g_{0\nu,\mu} - g_{\mu\nu,0}).$$

For $\mu = \nu = 0$ får vi

$$\Gamma^0_{00} = \frac{-1 + 2\Psi}{2} g_{00,0} = \frac{-1 + 2\Psi}{2}(-2\Psi_{,0}) = \Psi_{,0} \to \Psi_{,0},$$

der $\to$ betegner at vi gjennomfører en fouriertransformasjon. Formelt sett burde vi bruke en notasjon som skilte mellom Ψ og dens fouriertransformerte (og tilsvarende for andre størrelser), men vi følger Dodelson og lar det være. Potensielt forvirrende, men skånsomt mot mine håndledd og skuldre. Nok preik, la oss fortsette med $\mu = 0, \nu = i$:

$$\Gamma^0_{0i} = \frac{-1+2\Psi}{2}(g_{00,i} + g_{0i,0} - g_{0i,0}) = \frac{-1+2\Psi}{2}(-2\Psi_{,i}) = \Psi_{,i} \to ik_i\Psi,$$

og dette er også lik Γ^0_{i0}. Videre

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{ij} &= \frac{-1+2\Psi}{2}(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}) \\
&= \frac{-1+2\Psi}{2}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial t}[-a^2(1+2\Phi)] = \frac{1-2\Psi}{2}\delta_{ij}\left[2a\frac{da}{dt}(1+2\Phi) + 2a^2\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] \\
&= \delta_{ij}(1-2\Psi)\left[a\frac{da}{dt} + 2a\frac{da}{dt}\Phi + a^2\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] \\
&= \delta_{ij}\left[a\frac{da}{dt} + 2a\frac{da}{dt}\Phi + a^2\Phi_{,0} - 2a\frac{da}{dt}\Psi\right] \\
&= \delta_{ij}a^2\left[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}\right] \\
&\to \delta_{ij}a^2[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}].
\end{aligned}$$

Så fortsetter vi med

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{i\alpha}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}] \\
&= \frac{1}{2}g^{ii}(g_{i\mu,\nu} + g_{i\nu,\mu} - g_{\mu\nu,i}).
\end{aligned}$$

Vi har at $g_{ii} = a^2(1+2\Phi)$ slik at $g^{ii} = (1-2\Phi)/a^2$ til første orden. Det gir

$$\Gamma^i_{\mu\nu} = \frac{1}{2a^2}(1-2\Phi)(g_{i\mu,\nu} + g_{i\nu,\mu} - g_{\mu\nu,i}).$$

Dermed

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{00} &= \frac{1-2\Phi}{2a^2}(g_{i0,0} + g_{i0,0} - g_{00,i}) \\
&= \frac{1-2\Phi}{a^2}(2\Psi_{,i}) = \frac{1}{a^2}\Psi_{,i} \\
&\to \frac{ik_i}{a^2}\Psi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{j0} &= \frac{1-2\Phi}{2a^2}(g_{ij,0} + g_{i0,j} - g_{j0,i}) \\
&= \frac{1-2\Phi}{2a^2}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial t}a^2(1+2\Phi) \\
&= \frac{1-2\Phi}{2a^2}\delta_{ij}\left(2a\frac{da}{dt} + 4a\frac{da}{dt}\Phi + 2a^2\Phi_{,0}\right) \\
&= (1-2\Phi)\delta_{ij}(H + 2H\Phi + \Phi_{,0}) \\
&= \delta_{ij}(H + 2H\Phi + \Phi_{,0} - 2H\Phi) = \delta_{ij}(H + \Phi_{,0}) \\
&\to \delta_{ij}(H + \Phi_{,0}).
\end{aligned}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1-2\Phi}{2a^2}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}),$$

der

$$\begin{aligned} g_{ij,k} &= \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}a^2(1+2\Phi) \\ &= 2a^2\delta_{ij}\Phi_{,k} \to 2a^2\delta_{ij}ik_k\Phi. \end{aligned}$$

Dermed

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{jk} &\to \frac{1-2\Phi}{2a^2}2a^2\Phi(\delta_{ij}ik_k + \delta_{ik}ik_j - \delta_{jk}ik_i) \\ &= i\Phi(\delta_{ij}k_k + \delta_{ik}k_j - \delta_{jk}k_i). \end{aligned}$$

Dette var gøy, og heldigvis er ikke moroa på langt nær over. Nå skal vi ta fatt på Riccitensoren, den vidunderlige tensoren som generelt er gitt ved

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.$$

Først finner vi

$$R_{00} = \Gamma^\alpha_{00,\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\alpha,0} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{00} - \Gamma^\alpha_{\beta0}\Gamma^\beta_{0\alpha},$$

der bidraget fra ledd med $\alpha = 0$ blir

$$\Gamma^0_{00,0} - \Gamma^0_{00,0} + \Gamma^0_{\beta0}\Gamma^\beta_{00} - \Gamma^0_{\beta0}\Gamma^\beta_{00} = 0,$$

slik at vi bare trenger å se på at $\alpha = i$, en romlig indeks. De enkelte bidragene blir da

$$\Gamma^i_{00,i} = \sum_i \frac{ik^i}{a^2}\Psi_{,i} \to \sum_i -\frac{k^ik_i}{a^2}\Psi = -\frac{k^2}{a^2}\Psi,$$

$$\begin{aligned} -\Gamma^i_{0i,0} &= -\sum_i \frac{\partial}{\partial t}(H + \Phi, 0) \\ &\to -3\left(\frac{dH}{dt} + \Phi_{,00}\right) \\ &= -3\left(\frac{d^2a/dt^2}{a} - H^2 + \Phi_{,00}\right) \end{aligned}$$

$$\Gamma^i_{i\beta}\Gamma^\beta_{00} = \Gamma^i_{i0}\Gamma^0_{00} + \Gamma^i_{ij}\Gamma^j_{00} \to 3H\Psi_{,0},$$

der bare det første leddet bidrar til 1. orden, siden en rask titt på det andre leddet vil vise deg at det er av 2. orden i perturbasjonene. Deretter:

$$\begin{aligned} -\Gamma^i_{\beta0}\Gamma^\beta_{0i} &= -\Gamma^i_{00}\Gamma^0_{0i} - \Gamma^i_{j0}\Gamma^j_{0i} \\ &= -\sum_i\sum_j \delta_{ij}\delta_{ji}(H + \Phi_{,0})(H + \Phi_{,0}) \\ &\to -3(H^2 + 2H\Phi_{,0}) \end{aligned}$$

der det første leddet i øverste linje ikke bidrar, siden det er av 2. orden i perturbasjonene. Da kan vi samle sammen bitene:

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\frac{d^2a/dt^2}{a} + 3H^2 - 3\Phi_{,00} \\
&+ 3H\Psi_{,0} - 3H^2 - 6H\Phi_{,0} \\
&= -3\frac{d^2a/dt^2}{a} - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\Phi_{,00} + 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0}).
\end{aligned}
$$

Nå skal vi regne ut R_{ij}:

$$
R_{ij} = \Gamma^{\alpha}_{ij,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{ij} - \Gamma^{\alpha}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{i\alpha}.
$$

Vi tar for oss de enkelte leddene:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{ij,\alpha} &= \Gamma^{0}_{ij,0} + \Gamma^{k}_{ij,k} \\
&\to \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial t}[a^2(H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0})] + \sum_k ik_k(i\Phi)(\delta_{ki}k_j + \delta_{kj}k_i - \delta_{ij}k_k) \\
&= \delta_{ij}\{2a\frac{da}{dt}[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}] \\
&+ a^2[\frac{d^2a/dt^2}{a} - H^2 + 2(\frac{d^2a/dt^2}{a} - H^2)(\Phi - \Psi) \\
&+ 2H(\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + \Phi_{,00}]\} \\
&+ \sum_k -k_k(\delta_{ki}k_j + \delta_{kj}k_i - \delta_{ij}k_k)\Phi \\
&= \delta_{ij}\{2a\frac{da}{dt}[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}] \\
&+ a^2[\frac{d^2a/dt^2}{a} - H^2 + 2(\frac{d^2a/dt^2}{a} - H^2)(\Phi - \Psi) \\
&+ 2H(\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + \Phi_{,00}]\} + (-k_ik_j - k_jk_i + \delta_{ij}k^2)\Phi \\
&= \delta_{ij}\{2a\frac{da}{dt}[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}] \\
&+ a^2[\frac{d^2a/dt^2}{a} - H^2 + 2(\frac{d^2a/dt^2}{a} - H^2)(\Phi - \Psi) \\
&+ 2H(\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + \Phi_{,00}]\} - 2k_ik_j\Phi + \delta_{ij}k^2\Phi.
\end{aligned}
$$

Andre ledd:

$$
\begin{aligned}
-\Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j} &= -\Gamma^{0}_{i0,j} - \Gamma^{k}_{ik,j} \\
&\to -(ik_i)(ik_j)\Psi - \sum_k ik_j i\Phi(\delta_{ki}k_k + \delta_{kk}k_i - \delta_{ik}k_k) \\
&= k_ik_j\Psi + \sum_k k_j\Phi\delta_{kk}k_i \\
&= k_ik_j\Psi + 3k_ik_j\Phi.
\end{aligned}
$$

Tredje ledd:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{ij} &= \Gamma^{\alpha}_{0\alpha}\Gamma^{0}_{ij} + \Gamma^{\alpha}_{k\alpha}\Gamma^{k}_{ij} \\
&\rightarrow \delta_{ij}a^2[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}]\Psi_{,0} \\
&+ \delta_{ij}a^2[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}]\sum_m \delta_{mm}(H + \Phi_{,0}) \\
&= \delta_{ij}a^2 H\Psi_{,0} + 3\delta_{ij}a^2 H[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}] + 3\delta_{ij}a^2 H\Phi_{,0} \\
&= \delta_{ij}[a^2 H\Psi_{,0} + 3a^2H^2 + 6a^2H^2(\Phi - \Psi) + 6a^2 H\Phi_{,0}].
\end{aligned}$$

Det andre leddet i første linje var av andre orden i perturbasjonene og ble derfor droppet. Fjerde ledd:

$$\begin{aligned}
-\Gamma^{\alpha}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{i\alpha} &= -\Gamma^{\alpha}_{0j}\Gamma^{0}_{i\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{kj}\Gamma^{k}_{i\alpha} \\
&= -\Gamma^{0}_{0j}\Gamma^{0}_{i0} - \Gamma^{m}_{0j}\Gamma^{0}_{im} - \Gamma^{0}_{kj}\Gamma^{k}_{i0} - \Gamma^{m}_{kj}\Gamma^{k}_{im} \\
&\rightarrow 0 - \sum_m \delta_{mj}(H + \Phi_{,0})\delta_{im}a^2[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}] \\
&- \sum_k \delta_{kj}a^2[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}]\delta_{ki}(H + \Phi_{,0}) - 0 \\
&= -\delta_{ij}a^2(H + \Phi, 0)[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}] - \delta_{ij}a^2(H + \Phi, 0)[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}] \\
&= -2\delta_{ij}a^2[H^2 + 2H^2(\Phi - \Psi) + 2H\Phi_{,0}]
\end{aligned}$$

Dermed kan vi sette leddene sammen:

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \delta_{ij}\{2a\frac{da}{dt}[H + 2H(\Phi - \Psi) + \Phi_{,0}] \\
&+ a^2[\frac{d^2a/dt^2}{a} - H^2 + 2(\frac{d^2a/dt^2}{a} - H^2)(\Phi - \Psi) \\
&+ 2H(\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + \Phi_{,00}]\} - 2k_ik_j\Phi + \delta_{ij}k^2\Phi \\
&+ k_ik_j\Psi + 3k_ik_j\Phi \\
&+ \delta_{ij}[a^2H\Psi_{,0} + 3a^2H^2 + 6a^2H^2(\Phi - \Psi) + 6a^2H\Phi_{,0}] \\
&- 2\delta_{ij}a^2[H^2 + 2H^2(\Phi - \Psi) + 2H\Phi_{,0}] \\
&= k_ik_j(\Phi + \Psi) + \delta_{ij}[2a^2H^2 + 4a^2H^2(\Phi - \Psi) + 2a^2H^2\Phi_{,0} + a\frac{d^2a}{dt^2} - a^2H^2 \\
&+ 2a^2(\frac{d^2a/dt^2}{a} - H^2)(\Phi - \Psi) \\
&+ 2a^2H(\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + a^2\Phi_{,00} + k^2\Phi + a^2H\Psi_{,0} + 3a^2H^2 + 6a^2H^2(\Phi - \Psi) \\
&+ 6a^2H\Phi_{,0} - 2a^2H^2 - 4a^2H^2(\Phi - \Psi) - 4a^2H\Phi_{,0}] \\
&= k_ik_j(\Phi + \Psi) + \delta_{ij}[4a^2H^2\Phi - 4a^2H^2\Psi + 2a^2H\Phi_{,0} \\
&+ a\frac{d^2a}{dt^2} + 2a^2H^2 + 2a\frac{d^2a}{dt^2}\Phi - 2a\frac{d^2a}{dt^2}\Psi \\
&- 2a^2H^2\Phi + 2a^2H^2\Psi + 2a^2H\Phi_{,0} - 2a^2H\Psi_{,0} \\
&+ a^2\Phi_{,00} + k^2\Phi + a^2H\Psi_{,0} + 6a^2H^2\Phi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- && 6a^2H^2\Psi + 6a^2H\Phi_{,0} - 4a^2H^2\Phi + 4a^2H^2\Psi - 4a^2H\Phi_{,0}] \\
&= && k_ik_j(\Phi+\Psi) + \delta_{ij}[a\frac{d^2a}{dt^2} + 2a^2H^2 + 4a^2H^2\Phi + 2a\frac{d^2a}{dt^2}\Phi \\
&- && 4a^2H^2\Psi - 2a\frac{d^2a}{dt^2}\Psi + 6a^2H\Phi_{,0} - a^2H\Psi_{,0} + a^2\Phi_{,00} + k^2\Phi] \\
&= && k_ik_j(\Phi+\Psi) + \delta_{ij}[(a\frac{d^2a}{dt^2} + 2a^2H^2) + (a\frac{d^2a}{dt^2} + 2a^2H^2)2\Phi \\
&- && (a\frac{d^2a}{dt^2} + 2a^2H^2)\Psi + a^2H(6\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + a^2\Phi_{,00} + k^2\Phi] \\
&= && k_ik_j(\Phi+\Psi) + \delta_{ij}[(2a^2H^2 + a\frac{d^2a}{dt^2})(1 + 2\Phi - 2\Psi) \\
&+ && a^2H(6\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + a^2\Phi_{,00} + k^2\Phi].
\end{aligned}
$$

Etter dette er det bare en ting vi har lyst til: å regne ut Ricciskalaren. Og det får vi lov til nå:

$$
\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} \\
&= (-1+2\Psi)\left[-3\frac{d^2a/dt^2}{a} - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\Phi_{,00} + 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0})\right] \\
&+ \sum_i\sum_j \delta_{ij}\left(\frac{1-2\Phi}{a^2}\right)\{k_ik_j(\Phi+\Psi) + \delta_{ij}[(2a^2H^2 + a\frac{d^2a}{dt^2})(1+2\Phi-2\Psi) \\
&+ a^2H(6\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + a^2\Phi_{,00} + k^2\Phi]\} \\
&= (-1+2\Psi)[-3\frac{d^2a/dt^2}{a} - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\Phi_{,00} + 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0})] \\
&+ \frac{1-2\Phi}{a^2}\{k^2(\Phi+\Psi) + 3[(2a^2H^2 + a^2\frac{d^2a}{dt^2})(1+2\Phi-2\Psi) \\
&+ a^2H(6\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + a^2\Phi_{,00} + k^2\Phi]\}.
\end{aligned}
$$

Vi kan skille ut nullteordensbidraget:

$$
3\frac{d^2a/dt^2}{a} + 6H^2 + 3\frac{d^2a/dt^2}{a} = 6\left(H^2 + \frac{d^2a/dt^2}{a}\right).
$$

og sitter da igjen med Det Herlige Førsteordensbidraget (lovet være dets ledd)

$$
\begin{aligned}
\delta R &= \frac{k^2}{a^2}\Psi + 3\Phi_{,00} - 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0}) - 6\frac{d^2a/dt^2}{a}\Psi \\
&+ \frac{k^2}{a^2}(\Phi+\Psi) + 6\left(2H^2 + \frac{d^2a/dt^2}{a}\right)(\Phi - \Psi) \\
&+ 3H(6\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + 3\Phi_{,00} + 3\frac{k^2}{a^2}\Phi - 6\left(2H^2 + a\frac{d^2a}{dt^2}\right)\Phi \\
&= 2\frac{k^2}{a^2}\Psi + 4\frac{k^2}{a^2}\Phi + 6\Phi_{,00} - 3H\Psi_{,0} + 6H\Phi_{,0} - 6\frac{d^2a/dt^2}{a}\Psi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- && 12H^2\Psi - 6\frac{d^2a/dt^2}{a}\Psi + 18H\Phi_{,0} - 3H\Psi_{,0} \\
&= && -12\Psi\left(H^2 + \frac{d^2a/dt^2}{a}\right)_2 \frac{k^2}{a^2}\Psi + 6\Phi_{,00} \\
&- && 6H(\Psi_{,0} - 4\Phi_{,0}) + 4\frac{k^2}{a^2}\Phi.
\end{aligned}
$$

Vi har to ukjente, Φ og Ψ, og skal nå forsøke å lage to ligninger. Av forskjellige grunner er det enklere å hanskes med T^μ_ν enn med $T^{\mu\nu}$ eller $T_{\mu\nu}$, så vi skal bruke Einsteinligningen på formen

$$
G^\mu_\nu = 8\pi G T^\mu_\nu.
$$

Det betyr selvfølgelig at vi må gjennom en ny runde med utregninger for å heve en indeks på tensorene vi har regnet ut. Jippi. Vi setter opp 00-komponenten av ligningen, og husker at $G^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu}$. Da får vi at

$$
\begin{aligned}
G^0_0 &= g^{0\alpha}G_{\alpha 0} = g^{00}G_{00} = g^{00}\left(R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R\right) \\
&= (-1+2\Psi)R_{00} - \frac{1}{2}R \\
&= (-1+2\Psi)\left[-3\frac{d^2a/dt^2}{a} - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\Phi_{,00} + 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0})\right] \\
&+ 6\Psi\left(H^2 + \frac{d^2a/dt^2}{a}\right) - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\Phi_{,00} \\
&+ 3H(\Psi_{,0} - 4\Phi_{,0}) - 2\frac{k^2}{a^2}\Phi
\end{aligned}
$$

og med kun førsteordensleddene tatt med blir dette

$$
\begin{aligned}
\delta G^0_0 &= \frac{k^2}{a^2}\Psi + 3\Phi_{,00} - 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0}) - 6\Psi\frac{d^2a/dt^2}{a} \\
&+ 6\Psi\left(H + \frac{d^2a/dt^2}{a}\right) - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\Phi_{,00} \\
&+ 3H(\Psi_{,0} - 4\Phi_{,0}) - 2\frac{k^2}{a^2}\Phi \\
&= -6H\Phi_{,0} + 6H^2\Psi - 2\frac{k^2}{a^2}\Phi.
\end{aligned}
$$

Bidraget til energi-impulstensoren fra en komponent med fordelingsfunksjon f_i og antall indre frihetsgrader lik g_i er gitt ved

$$
T^\mu_\nu = g_i \int \frac{dP_1 dP_2 dP_3}{(2\pi)^3}(-\mathrm{det}g_{\alpha\beta})^{-1/2}\frac{P^\mu P_\nu}{P^0}f_i(\vec{x},\vec{p},t).
$$

Siden metrikken er diagonal, er det en smal sak å regne ut determinanten:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{det}g_{\mu\nu} &= -a^6(1+2\Psi)(1+2\Phi)^3 = -a^6(1+2\Psi)(1+6\Phi) \\
&= -a^6(1+2\Psi+6\Phi),
\end{aligned}
$$

og dermed er

$$(-\det g_{\mu\nu})^{-1/2} = a^{-3}(1+2\Psi+6\Phi)^{-1/2} = a^{-3}(1-\Psi-3\Phi),$$

Vi ser på bidraget fra fotonene (de andre er mye enklere). For disse fant vi tidligere at

$$\begin{aligned} P^0 &= p(1-\Psi) = E(1-\Psi) \\ P^i &= p\hat{p}^i \frac{1-\Phi}{a}, \end{aligned}$$

og da blir

$$P_0 = g_{0\mu}P^\mu = g_{00}P^0 = -(1+2\Psi)E(1-\Psi) = -E(1+\Psi),$$

og

$$P_i = g_{i\mu}P^\mu = g_{ii}P^i = a^2(1+2\Phi)p\hat{p}^i\frac{1-\Phi}{a} = ap\hat{p}^i(1+\Phi).$$

Da finner vi at

$$\begin{aligned} T^0_0 &= g_i \int \frac{a^3(1+\Phi)^3 d^3p}{(2\pi)^3} a^{-3}(1-\Psi-3\Phi)\frac{P^0 P_0}{P^0} f_i(\vec{x},\vec{p},t) \\ &= -g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(1+3\Phi)(1-\Psi-3\Phi)(1+\Psi)Ef_i(\vec{x},\vec{p},t) \\ &= -g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} Ef_i(\vec{x},\vec{p},t). \end{aligned}$$

Det er interessant å legge merke til at dette er det samme uttrykket vi ville ha satt opp dersom vi så bort ifra perturbasjonene i metrikken. For å regne ut fotonbidraget må vi huske at $g_i = 2$, $E(p) = p$, og

$$f = f^{(0)} - p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta.$$

Dermed:

$$\begin{aligned} T^0_0 &= -2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p \left[f^{(0)} - p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta \right] \\ &= -\rho_\gamma + 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta(\hat{p},\vec{x},t) \\ &= -\rho_\gamma + 2\int_0^\infty \frac{dpp^4}{(2\pi)^3}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\int d\Omega_p \Theta(\hat{p},\vec{x},t) \\ &= -\rho_\gamma + \frac{8\pi}{(2\pi)^3}\Theta_0 \left\{ [p^4 f^{(0)}]_0^\infty - 4\int_0^\infty dpp^3 f^{(0)} \right\} \\ &= -\rho_\gamma - \Theta_0 \frac{8\pi}{(2\pi)^3} 4\int_0^\infty dpp^2 f^{(0)} \\ &= -\rho_\gamma - 4\Theta_0 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} pf^{(0)} \\ &= -\rho_\gamma - 4\Theta_0\rho_\gamma = -\rho_\gamma(1+4\Theta_0). \end{aligned}$$

Bidraget fra masseløse nøytrinoer blir identisk i formen

$$T^0_0 = -\rho_\nu(1 + 4\mathcal{N}_0).$$

Bidraget fra CDM og baryoner er per definisjon av perturbasjonsvariablene $-\rho_i(1 + \delta_i)$, der $i = \mathrm{dm}, b$. Fra $\delta G^0_0 = 8\pi G \delta T^0_0$ får vi da

$$-6H\Phi_{,0} + 6H^2\Psi - 2\frac{k^2}{a^2}\Phi = -8\pi G[\rho_{\mathrm{dm}}\delta + \rho_b\delta_b + 4\rho_\gamma\Theta_0 + 4\rho_\nu\mathcal{N}_0],$$

dvs.

$$-3H\Phi_{,0} + 3H^2\Psi - \frac{k^2}{a^2}\Phi = -4\pi G[\rho_{\mathrm{dm}}\delta + \rho_b\delta_b + 4\rho_\gamma\Theta_0 + 4\rho_\nu\mathcal{N}_0].$$

Vi skifter så til konform tid, og husker på at da er $H = \dot{a}/a^2$. Dermed

$$-3\frac{\dot{a}}{a^2}\frac{1}{a}\dot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^4}\Psi - \frac{k^2}{a^2}\Phi = -4\pi G[\rho_{\mathrm{dm}}\delta + \rho_b\delta_b + 4\rho_\gamma\Theta_0 + 4\rho_\nu\mathcal{N}_0],$$

som kan ordnes om til

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} - \Psi\frac{\dot{a}}{a}\right) = 4\pi G a^2(\rho_{\mathrm{dm}}\delta + \rho_b\delta_b + 4\rho_\gamma\Theta_0 + 4\rho_\nu\mathcal{N}_0).$$

Vi trenger en ligning til. Hvis vi tar utgangspunkt i

$$\begin{aligned} G^i_j &= g^{ik}\left[R_{kj} - \frac{1}{2}g_{kj}R\right] \\ &= \frac{\delta^{ik}(1-2\Phi)}{a^2}R_{kj} - \frac{1}{2}\delta^{ij}R \\ &= A\delta_{ij} + \frac{k_ik_j(\Phi+\Psi)}{a^2}, \end{aligned}$$

der A inneholder mange ledd som du helst ikke vil at jeg skal skrive ned. Dodelson, som den smarte lille rakkeren han er, klarer å lage en ligning til uten å involvere leddene i A. Det gjør han ved å gange ligningen med projeksjonsoperatoren $\hat{k}_i\hat{k}^j - \delta^j_i/3$. Siden

$$\begin{aligned} \left(\hat{k}_i\hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta^j_i\right)\delta_{ij} &= \hat{k}_i\hat{k}^i - \frac{1}{3}\sum_i\sum_j \delta_{ij}\delta^j_i \\ &= 1 - \frac{1}{3}\sum_i \delta_{ii} = 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\hat{k}_i\hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta^j_i\right)G^i_j &= 0 + \hat{k}_i\hat{k}^j\frac{k^ik_j(\Phi+\Psi)}{a^2} - \frac{1}{3}\delta^j_i\frac{k^ik_j(\Phi+\Psi)}{a^2} \\ &= \frac{k^2}{a^2}(\Phi+\Psi) - \frac{1}{3}\frac{k^2}{a^2}(\Phi+\Psi) \\ &= \frac{2k^2}{3a^2}(\Phi+\Psi). \end{aligned}$$

Vi må gjennomføre samme operasjon på T^i_j, gitt ved (for én partikkeltype)

$$\begin{aligned} T^i_j &= g_i \int \frac{dP_1 dP_2 dP_3}{(2\pi)^3} (-\det g_{\alpha\beta})^{-1/2} \frac{P^i P_j}{P^0} f_i(\vec{x}, \vec{p}, t) \\ &= g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}] \frac{p^2 \hat{p}^i \hat{p}^j}{E^2} f_i(\vec{x}, \vec{p}, t). \end{aligned}$$

Siden

$$\begin{aligned} \left(\hat{k}_i \hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta^j_i\right) \hat{p}^i \hat{p}_j &= (\hat{k} \cdot \hat{p})^2 - \frac{1}{3}(\hat{k} \cdot \hat{k})(\hat{p} \cdot \hat{p}) \\ &= \mu^2 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3} P_2(\mu), \end{aligned}$$

der μ er cosinus til vinkelen mellom k og p og P_2 er Legendrepolynomet av grad 2. Dermed ser vi at

$$\left(\hat{k}_i \hat{k}^j - \frac{1}{3}\delta^j_i\right) T^i_j = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2}{3} P_2(\mu) \frac{p^2}{E} f_i(\vec{x}, \vec{p}, t),$$

som viser seg å være forskjellig fra null bare for fotoner og nøytrinoer. Bidraget fra den perturberte delen av fotonenes fordelingsfunksjon blir

$$-2 \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(2\pi)^3} p^2 \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2} \frac{2}{3} P_2(\mu) \Theta(\mu) = -\frac{8}{3} \rho_\gamma \Theta_2,$$

og tilsvarende for nøytrinoene. Disse bidragene kalles på dårlig norsk for 'anisotropisk stress'. Den andre ligningen vår blir dermed

$$\frac{2}{3a^2} k^2 (\Phi + \Psi) = 8\pi G \left(-\frac{8}{3}\right) (\rho_\gamma \Theta_2 + \rho_\nu \mathcal{N}_2),$$

det vil si

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2 (\rho_\gamma \Theta_2 + \rho_\nu \mathcal{N}_2).$$

Tensorperturbasjoner

Nå har vi satt opp ligningene for skalare perturbasjoner. Men perturbasjoner kommer i flere varianter, og en annen viktig type for kosmologi er såkalte tensorperturbasjoner. På grunn av noe som heter frakoblingsteoremet (beskrevet nærmere i Dodelson) utvikler skalar- og tensorperturbasjoner uavhengig av hverandre. Vi skal få et glimt av hvorfor det er slik i det følgende.

Tensorperturbasjoner kalles mer populært for gravitasjonsbølger. Det dreier seg med andre ord om periodiske variasjoner i strukturen til tidrommet. Ved å velge gauge på riktig måte kan slike perturbasjoner beskrives med en metrikk på formen $g_{00} = -1$, $g_{0i} = 0$ og

$$
\begin{aligned}
g_{ij} &= a^2(t) \begin{pmatrix} 1+h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & 1-h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= a^2(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a^2(t) \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= a^2(t)(\delta_{ij} + \mathcal{H}_{ij})
\end{aligned}
$$

Skrevet på denne måten beskriver denne tensoren perturbasjoner i xy-planet, og bølgevektoren $\vec{k}$ er valgt langs z-aksen. Legg merke til at tensoren $\mathcal{H}$ som beskriver perturbasjonene er symmetrisk og traseløs. Siden k_z er den eneste komponenten av $\vec{k}$ som er forskjellig fra null, har vi også at

$$k^i \mathcal{H}_{ij} = k^j \mathcal{H}_{ij} = 0,$$

som er fourierromsvarianten av ligningen som sier at tensoren også er divergensløs (og etter ytterligere noen sider med algebra vil den også være venneløs). Vi må finne ligningene som beskriver tidsutviklingen til disse perturbasjonene, og må derfor ta fatt på en ny runde med Christoffelsymboler, Riccitensor og Ricciskalar.

Christoffelsymboler: Vi husker ikke at

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}),$$

derfor skrev jeg den opp en gang til. Starter vi med

$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{00}(g_{\alpha 0,\beta} + g_{\beta 0,\alpha} - g_{\alpha\beta,0}),$$

ser vi straks at $\Gamma^0_{ij} = \Gamma^0_{i0} = 0$, og

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{ij} &= -\frac{1}{2} g^{00} g_{ij,0} = \frac{1}{2} g_{ij,0} \\
&= \frac{1}{2} 2H g_{ij} + a^2 \mathcal{H}_{ij,0} \\
&= H g_{ij} + \frac{1}{2} a^2 \mathcal{H}_{ij,0}.
\end{aligned}
$$

Videre:

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{i\nu}(g_{0\nu,0} + g_{0\nu,0} - g_{00,\nu}) = 0,$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^i_{0j} &= \frac{1}{2} g^{i\nu}(g_{0\nu,0} + g_{j\nu,0} - g_{0j,\nu}) \\
&= \frac{1}{2} g^{ik} g_{jk,0} = \frac{1}{2} g^{ik}(2H g_{jk} + a^2 \mathcal{H}_{jk,0}) \\
&= H\delta_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\delta^{ik}}{a^2} a^2 \mathcal{H}_{jk,0} = H\delta_{ij} + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{ij,0}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}g^{i\nu}(g_{j\nu,k} + g_{k\nu,j} - g_{jk,\nu}) \\
&= \frac{1}{2}g^{im}(g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}) \\
&= \frac{1}{2a^2}(\delta_{im} - \mathcal{H}_{im})(g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}).
\end{aligned}
$$

Her har vi brukt at $g^{ij} = \frac{1}{a^2}(\delta_{ij} - \mathcal{H}_{ij})$ til første orden, noe du kan sjekke selv ved å kontrollere at $g^{ik}g_{kj} = \delta_{ij}$. Vi har at

$$
\begin{aligned}
g_{jm,k} &= \frac{\partial}{\partial x^k}a^2(\delta_{jm} + \mathcal{H}_{jm}) = a^2\frac{\partial}{\partial x^k}\mathcal{H}_{jm} \\
&\rightarrow a^2 ik_k\mathcal{H}_{jm},
\end{aligned}
$$

slik at

$$
\begin{aligned}
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2a^2}\delta_{im}a^2 i(k_k\mathcal{H}_{jm} + k_j\mathcal{H}_{km} - k_m\mathcal{H}_{jk}) \\
&= \frac{i}{2}(k_k\mathcal{H}_{ij} + k_j\mathcal{H}_{ik} - k_i\mathcal{H}_{jk}).
\end{aligned}
$$

For å inspirere meg selv til å regne ut Riccitensoren, skriver jeg ned det generelle uttrykket for den en gang til:

$$
R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}.
$$

Det hjalp. Da starter jeg:

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= \Gamma^\alpha_{00,\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\alpha,0} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{00} - \Gamma^\alpha_{\beta 0}\Gamma^\beta_{0\alpha} \\
&= -\Gamma^i_{0i,0} - \Gamma^i_{j0}\Gamma^j_{0i} \\
&= -\sum_i \frac{\partial}{\partial t}\left(H\delta_{ii} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{ii,0}\right) \\
&- \left(H\delta_{ii} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{ij,0}\right)\left(H\delta_{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{ij,0}\right) \\
&= -3\frac{dH}{dt} - H^2\sum_{ij}\delta_{ij}\delta_{ij} - H\delta_{ij}\mathcal{H}_{ij,0} \\
&= -3\frac{d^2a/dt^2}{a} + 3H^2 - 3H^2 - 0 \\
&= -3\frac{d^2a/dt^2}{a}.
\end{aligned}
$$

Her har jeg blant annet brukt at

$$
\delta_{ij}\mathcal{H}_{ij}, 0 = (\delta_{ij}\mathcal{H}_{ij})_{,0} = (\mathrm{Tr}\mathcal{H})_{,0} = 0.
$$

Det du bør legge merke til, er at R_{00} ikke får noe bidrag (til første orden) fra tensorperturbasjonene. Dette gir et hint om at tensorperturbasjoner og skalarperturbasjoner (som bidro til R_{00}) ikke bryr seg så mye om hverandre. Så tar vi fatt på R_{ij}:

$$R_{ij} = \Gamma^{\alpha}_{ij,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{ij} - \Gamma^{\alpha}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{i\alpha}.$$

Vi tar de to første leddene for seg:

$$\Gamma^{\alpha}_{ij,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j} = \Gamma^{0}_{ij,0} - \Gamma^{k}_{ij,k} - \Gamma^{k}_{ik,j}.$$

Vi trenger

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0}_{ij} &= \frac{1}{2}g_{ij,0} \\
\Gamma^{k}_{ik} &= \frac{i}{2}\sum_k (k_k\mathcal{H}_{ki} + k_i\mathcal{H}_{kk} - k_k\mathcal{H}_{ik}) \\
&= \frac{i}{2}k_i\sum_k \mathcal{H}_{kk} = 0 \\
\Gamma^{k}_{ij,k} &= \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{i}{2}(k_j\mathcal{H}_{ki} + k_i\mathcal{H}_{kj} - k_k\mathcal{H}_{ij}) \\
&\rightarrow -\frac{1}{2}\sum_k (k_jk_k\mathcal{H}_{ik} + k_ik_k\mathcal{H}_{jk} - k_kk_k\mathcal{H}_{ij}).
\end{aligned}$$

Vi har valgt å legge z-aksen langs $\vec{k}$. Det betyr at vi må ha $j = k = 3$ for å få bidrag forskjellig fra null, men siden $\mathcal{H}_{j3} = 0$ blir vi bare sittende igjen med

$$\Gamma^{k}_{ij,k} = \frac{1}{2}\sum_k k_kk_k\mathcal{H}_{ij} = \frac{k^2}{2}\mathcal{H}_{ij},$$

og dermed

$$\Gamma^{\alpha}_{ij,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j} = \frac{1}{2}g_{ij,00} + \frac{k^2}{2}\mathcal{H}_{ij}.$$

Nå kommer det en morsom overraskelse: vi regner ut det fjerde leddet før vi regner ut det tredje! Vi jubler og regner videre

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{i\alpha} &= \Gamma^{0}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{i0} + \Gamma^{k}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{ik} \\
&= \Gamma^{0}_{0j}\Gamma^{0}_{i0} + \Gamma^{0}_{mj}\Gamma^{m}_{i0} + \Gamma^{k}_{0j}\Gamma^{0}_{ik} + \Gamma^{k}_{mj}\Gamma^{m}_{ik} \\
&= \left(Hg_{mj} + \frac{a^2}{2}\mathcal{H}_{mj,0}\right)\left(H\delta_{mi} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{mi,0}\right) \\
&+ \left(H\delta_{kj} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{kj,0}\right)\left(Hg_{ik} + \frac{a^2}{2}\mathcal{H}_{ik,0}\right) \\
&+ \text{ ledd av andre orden} \\
&= H^2g_{ij} + \frac{1}{2}Hg_{mj}\mathcal{H}_{mi,0} + \frac{a^2}{2}H\mathcal{H}_{ij,0} \\
&+ H^2g_{ij} + \frac{1}{2}a^2H\mathcal{H}_{ij,0} + \frac{1}{2}Hg_{ik}\mathcal{H}_{kj,0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2H^2 g_{ij} + a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} + \frac{1}{2}a^2 H\delta_{mj}\mathcal{H}_{mi,0} + \frac{1}{2}a^2 H\delta_{ik}\mathcal{H}_{kj,0} \\
&= 2H^2 g_{ij} + a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} + \frac{1}{2}a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} + \frac{1}{2}a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} \\
&= 2H^2 g_{ij} + 2a^2 H\mathcal{H}_{ij,0}.
\end{aligned}$$

Nå har jeg holdt dere på pinebenken lenge nok: her kommer det tredje leddet:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{ij} &= \Gamma^{k}_{k0}\Gamma^{0}_{ij} + \Gamma^{k}_{kl}\Gamma^{l}_{ij} \\
&= \Gamma^{k}_{k0}\Gamma^{0}_{ij} + \text{(ledd av andre orden)} \\
&= \left[\sum_k \left(H\delta_{kk} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{kk,0}\right)\right]\left(Hg_{ij} + \frac{a^2}{2}\mathcal{H}_{ij,0}\right) \\
&= 3H\left(Hg_{ij} + \frac{a^2}{2}\mathcal{H}_{ij,0}\right) \\
&= 3H^2 g_{ij} + \frac{3}{2}a^2 H\mathcal{H}_{ij,0}.
\end{aligned}$$

Men vi har også at

$$g_{ij,0} = 2Hg_{ij} + a^2\mathcal{H}_{ij,0},$$

dvs.

$$2Hg_{ij} = g_{ij,0} - a^2\mathcal{H}_{ij,0},$$

slik at

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{ij} &= \frac{3}{2}Hg_{ij,0} - \frac{3}{2}a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} + \frac{3}{2}a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} \\
&= \frac{3}{2}Hg_{ij,0}.
\end{aligned}$$

Da kan vi kombinere leddene:

$$R_{ij} = \frac{1}{2}g_{ij,00} + \frac{1}{2}k^2\mathcal{H}_{ij} + \frac{3}{2}g_{ij,0} - 2H^2 g_{ij} - 2a^2 H\mathcal{H}_{ij,0},$$

der

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= a^2(\delta_{ij} + \mathcal{H}_{ij}) \\
g_{ij,0} &= 2Hg_{ij} + a^2\mathcal{H}_{ij} \\
g_{ij,00} &= 2Hg_{ij,0} + 2g_{ij}\frac{dH}{dt} + 2a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} + a^2\mathcal{H}_{ij,00} \\
&= 4H^2 g_{ij} + 2a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} + 2\frac{d^2a/dt^2}{a}g_{ij} - 2H^2 g_{ij} + 2a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} + a^2\mathcal{H}_{ij,0} \\
&= 2H^2 g_{ij} + 2\frac{d^2a/dt^2}{a}g_{ij} + 4a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} + a^2\mathcal{H}_{ij,00}.
\end{aligned}$$

Dermed:

$$R_{ij} = H^2 g_{ij} + \frac{d^a/dt^2}{a}g_{ij} + 2a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} + \frac{a^2}{2}\mathcal{H}_{ij,00}$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad \frac{k^2}{2}\mathcal{H}_{ij} + 3H^2 g_{ij} + \frac{3}{2}a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} - 2H^2 g_{ij} - 2a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} \\
&= \quad g_{ij}\left(\frac{d^2a/dt^2}{a} + 2H^2\right) + \frac{3}{2}a^2 H\mathcal{H}_{ij,0} + \frac{a^2}{2}\mathcal{H}_{ij,00} + \frac{k^2}{2}\mathcal{H}_{ij}.
\end{aligned}$$

Vi ser til slutt på Ricciskalaren:

$$R = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij}.$$

Både g^{00} og R_{00} er av nullte orden i perturbasjonene, så det første leddet trenger vi ikke tenke noe mere på. I det andre leddet legger vi først merke til at det første leddet i R_{ij} er proporsjonalt med g_{ij}, og at $g^{ij}g_{ij} = 3$, så dette leddet gir igjen kun et bidrag av nullte orden. De resterende leddene i R_{ij} er av første orden i perturbasjonene, og da trenger vi bare å ta med nullteordensleddet i g^{ij}, som er lik δ_{ij}/a^2. Da ser vi at alle bidragene vil inneholde kombinasjonen $\delta_{ij}\mathcal{H}_{ij} = Tr(\mathcal{H}) = 0$. Med andre ord er det *ingen* ledd i Ricciskalaren som vil bidra til ligningene for førsteordens tensorperturbasjoner! Det betyr at for den biten av Einsteintensoren som kommer fra førsteordensperturbasjoner har vi

$$\delta G^i_j = \delta R^i_j.$$

Vi må regne ut $R^i_j = g^{ik}R_{kj}$:

$$\begin{aligned}
R^i_j &= g^{ik}\left[g_{kj}\left(\frac{d^2a/dt^2}{a} + 2H^2\right) + \frac{3}{2}a^2 H\mathcal{H}_{kj,0} + \frac{a^2}{2}\mathcal{H}_{kj,00} + \frac{k^2}{2}\mathcal{H}_{kj}\right] \\
&= \delta_{ij}\left(\frac{d^2a/dt^2}{a} + 2H^2\right) + \delta^{ik}\left(\frac{3}{2}H\mathcal{H}_{kj,0} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{kj,00} + \frac{k^2}{2a^2}\mathcal{H}_{kj}\right),
\end{aligned}$$

og da ser vi at førsteordensbidraget er

$$\delta R^i_j = \delta^{ik}\left(\frac{3}{2}H\mathcal{H}_{kj,0} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{kj,00} + \frac{k^2}{2a^2}\mathcal{H}_{kj}\right).$$

Vi ser da at

$$\delta G^1_1 = \delta^{1k}\left(\frac{3}{2}H\mathcal{H}_{k1,0} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{k1,00} + \frac{k^2}{2a^2}\mathcal{H}_{k1}\right) = \frac{3}{2}H\mathcal{H}_{11,0} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{11,00} + \frac{k^2}{2a^2}\mathcal{H}_{11},$$

og tilsvarende

$$\delta G^2_2 = \frac{3}{2}H\mathcal{H}_{22,0} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{22,00} + \frac{k^2}{2a^2}\mathcal{H}_{22} = -\delta G^1_1,$$

siden $\mathcal{H}_{11} = h_+ = -\mathcal{H}_{22}$. Da får vi at

$$\delta G^1_1 - \delta G^2_2 = 2\delta G^1_1 = 3Hh_{+,0} + h_{+,00} + \frac{k^2}{a^2}h_+.$$

Vi skifter til konform tid og bruker at

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} &= \frac{1}{a}\frac{d}{d\eta} \\
\frac{d^2}{dt^2} &= \frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}\frac{1}{a}\frac{d}{d\eta} = \frac{1}{a^2}\frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{\dot{a}}{a^3}\frac{d}{d\eta} \\
H &= \frac{da/dt}{a} = \frac{\dot{a}}{a^2}.
\end{aligned}$$

Dermed

$$\begin{aligned}
\delta G^1_1 - \delta G^2_2 &= 3\frac{\dot{a}}{a^2}\frac{1}{a}\dot{h}_+ + \frac{1}{a^2}\ddot{h}_+ - \frac{\dot{a}}{a^3}\dot{h}_+ + \frac{k^2}{a^2}h_+ \\
&= \frac{1}{a^2}\left(\ddot{h}_+ + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_+ + k^2 h_+\right).
\end{aligned}$$

For at Einstein skal bli fornøyd, må dette være lik $\delta T^1_1 - \delta T^2_2$. Ser vi på fotoner, så har vi at

$$T^i_j = 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p^2\hat{p}^i\hat{p^j}}{E} f(\vec{x},\vec{p},t).$$

Med z-aksen langs k har vi at

$$\begin{aligned}
\hat{p}^1 &= \cos\phi\sin\theta \\
\hat{p}^2 &= \sin\phi\sin\theta \\
\hat{p}^3 &= \cos\theta.
\end{aligned}$$

Førsteordensbidraget δT^i_j kommer fra Θ-leddet i rekkeutviklingen av fordelingsfunksjonen f. Dersom Θ bare avhenger av $\mu = \cos\theta$ (hvilket vi antar) vil integralene som gir δT^1_1 og δT^2_2 være identiske, bortsett fra den delen som går over ϕ, som vil være gitt ved

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2\phi = \pi,$$

for 11,

$$\int_0^{2\pi} d\phi \sin^2\phi = \pi,$$

for 22. Derfor vil vi ha $\delta T^1_1 - \delta T^2_2 = 0$ for fotoner. De andre bidragene kan også vises å være lik 0. Dermed får vi at tensorperturbasjonen h_+ oppfyller ligningen

$$\ddot{h}_+ + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_+ + k^2 h_+ = 0.$$

Dette er bølgeligningen for gravitasjonsbølger i et Robertson-Walkerunivers. En liten ekstraregning viser oss at ligningen for $h_\times$ blir identisk: Ser på 12-komponenten,

$$\delta G^1_2 = \frac{3}{2}H\mathcal{H}_{12,0} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{12,00} + \frac{k^2}{2a^2}\mathcal{H}_{12}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}Hh_{\times,0} + \frac{1}{2}h_{\times,00} + \frac{k^2}{2a^2}h_\times \\
&= \frac{1}{2a^2}\left(\ddot{h}_\times + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_\times + k^2 h_\times\right).
\end{aligned}
$$

Vi har også at (for fotoner)

$$T^1_2 = 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p^2\hat{p}^i\hat{p}^j}{E}f,$$

og for førsteordensbidraget (under antagelse om at Θ er ϕ-uavhengig) har vi, siden $\hat{p}^1\hat{p}^2 = \sin\phi\cos\phi\sin^2\theta$, at ϕ-integralet gir

$$\int_0^{2\pi} d\phi \sin\phi\cos\phi = 0,$$

så $\delta T^1_2 = 0$. Dermed blir bølgeligningen for $h_\times$

$$\ddot{h}_\times + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_\times + k^2 h_\times = 0.$$

Dermed kan vi oppsummere ligningene som beskriver tidsutviklingen av tensorperturbasjoner i

$$\ddot{h}_\alpha + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_\alpha + k^2 h_\alpha = 0,$$

der $\alpha = +, \times$.

Nachspiel: frakoblingsteoremet og gauger

Vi har behandlet tensorperturbasjonene som om de utvikler seg uavhengig av skalarperturbasjonene og omvendt. Det har vi lov til å gjøre fordi et generelt teorem sier at skalar, vektor og tensorperturbasjoner til første orden ikke kobler til hverandre. For vårt valg av perturbert metrikk kan vi se at dette stemmer i tilfellet av skalar- og tensorperturbasjoner. Ligningene for skalarperturbasjonene fikk vi fra G^0_0 og $(\hat{k}^i\hat{k}^j - \delta_{ij}/3)G^i_j$. Vi har allerede sett at tensorperturbasjonene ikke bidrar til R_{00} og R, slik at skalarligningen som kommer fra G^0_0 ikke blir påvirket av dem. Det gjenstår bare å se på det eventuelle bidraget fra tensorperturbasjoner til G^i_j. Siden vi har valgt z-aksen langs $\vec{k}$ har vi $\vec{k} = k\hat{k}_3$, og dermed

$$
\begin{aligned}
\left(\hat{k}_i\hat{h}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\delta G^i_j &= \left(\delta_{i3}\delta_{j3} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\left(\frac{3}{2}H\mathcal{H}_{ij,0} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{ij,00} + \frac{k^2}{2a^2}\mathcal{H}_{ij}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}H\mathcal{H}_{33,0} + \frac{1}{2}\mathcal{H}_{33,00} + \frac{k^2}{2a^2}\mathcal{H}_{33}\right) \\
&- \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}H(\mathrm{Tr}\mathcal{H})_{,0} + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\mathcal{H})_{,00} + \frac{k^2}{2a^2}\mathrm{Tr}\mathcal{H}\right].
\end{aligned}
$$

Men $\mathcal{H}_{33} = -$ og $\mathrm{Tr}\mathcal{H} = 0$, så hele suppedassen er lik null. Dermed vil ingen av ligningene for skalare perturbasjoner, Ψ og Φ, få bidrag fra tensorperturbasjoner.

Både Dodelson og jeg har tidligere hintet om at vårt valg av metrikk for skalare perturbasjoner (og også for tensorperturbasjoner, men de lar vi ligge nå) ikke er unikt. Det finnes andre muligheter. Å bestemme seg for en måte å skrive $g_{\mu\nu}$ på kalles å velge gauge. Gauger har morsomme navn: den vi har brukt kalles for 'konform newtonsk gauge'. Andre rariteter er 'romlig flat gauge' og 'synkron gauge'. Så lenge man vet hva man gjør, kan man velge å regne i den gaugen som er mest bekvem for anledningen. Vårt valg av gauge er bekvemt dersom man ønsker å ha en forholdsvis enkel relasjon til resultater fra newtonsk gravitasjonsteori. Den romlige flate gaugen er imidlertid enklere å bruke i anvendelser på inflasjon, og synkrongaugen gir perturbasjonsligninger som har snillere numeriske egenskaper enn de vi har fått ut fra vårt gaugevalg. Med så mange muligheter er det viktig å vite hvordan man relaterer perturberte variable i ulike gauger til hverandre. Et gaugevalg svarer i bunn og grunn til et valg av koordinater, så vi må se på hvordan variablene i en metrikk med skalare perturbasjoner oppfører seg under koordinattransformasjoner. Den mest generelle metrikken med skalare perturbasjoner kan skrives som

$$\begin{aligned} g_{00} &= -(1 + 2A(\vec{x}, t)) \\ g_{0i} &= -aB_{,i} = -a\frac{\partial B(\vec{x}, t)}{\partial x^i} \\ g_{ij} &= a^2[\delta_{ij}(1 + 2\psi) - 2E_{,ij}(\vec{x}, t)], \end{aligned}$$

og vi ser at den avhenger av fire funksjoner: A, B, ψ, E. Vår gauge svarer til $A = \Psi$, $\psi = \Phi$, $B = E = 0$. For å finne ut hvordan disse funksjonene transformerer, tar vi utgangspunkt i at linjelementet er en skalar:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,$$

der $\tilde{..}$ markerer transformerte størrelser. Siden

$$d\tilde{x}^\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}dx^\mu,$$

kan denne ligningen skrives

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} = g_{\mu\nu}(x).$$

Den mest generelle koordinattransformasjonen kan skrives

$$\begin{aligned} t &\to \tilde{t} = t + \xi^0(\vec{x}, t) \\ x^i &\to \tilde{x}^i = x^i + \xi_{,i}(\vec{x}, t), \end{aligned}$$

der ξ^0 og ξ skal oppfattes som små størrelser og behandles på samme ufine måte som perturbasjonene i metrikken: bare ledd av første orden skal tas hensyn til. I det følgende må vi også huske på at skalafaktoren endres under disse transformasjonene:

$$a(t) \to \tilde{a}(\tilde{t}) = a(\tilde{t}) = a(t + \xi^0) = a(t) + \frac{da}{dt}\xi^0 = a(1 + H\xi^0).$$

.

La oss finne ut hvordan A transformerer. Det gjør vi ved å se på 00-komponenten av metrikken:

$$\begin{aligned}
-1 + 2A &= \tilde{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial t}\frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial t} \\
&= -(1 + 2\tilde{A})\left(\frac{\partial\tilde{t}}{\partial t}\right)^2 - 2\tilde{a}\tilde{B}_{,i}\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial t}\frac{\partial\tilde{x}^0}{\partial t} \\
&+ \tilde{a}^2(\delta_{ij}(1 + 2\psi) - 2\tilde{E}_{,ij})\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial t}\frac{\partial\tilde{x}^j}{\partial t}.
\end{aligned}$$

En rask gjennomgang av de enkelte leddene over vil overbevise deg om at bare det første inneholder noe som bidrar til første orden. I det andre leddet er for eksempel $\tilde{B}$ av første orden, men det er også $\partial\tilde{x}^0/\partial t = \partial\xi^0/\partial t$, så dette leddet er av andre orden. Dermed ender vi opp med

$$-(1 + 2\tilde{A})\left(\frac{\partial\tilde{t}}{\partial t}\right)^2 = -(1 + 2A),$$

som gir

$$\begin{aligned}
-1 - 2A &= -(1 + 2\tilde{A})\left(1 + \frac{\partial\xi^0}{\partial t}\right)^2 \\
&= -(1 + 2\tilde{A})\left(1 + 2\frac{\partial\xi^0}{\partial t}\right) \\
&= -1 - 2\tilde{A} - 2\frac{\partial\xi^0}{\partial t}
\end{aligned}$$

og da ser vi at

$$A \to \tilde{A} = A - \frac{\partial\xi^0}{\partial t} = A - \frac{1}{a}\dot{\xi}^0,$$

der vi i den siste overgangen har byttet til konform tid. Så ser vi på $0i$-komponenten:

$$\begin{aligned}
-aB_{,i} &= -(1 + 2\tilde{A})\frac{\partial\tilde{t}}{\partial t}\frac{\partial\tilde{t}}{\partial x^i} + (-\tilde{a}\tilde{B}_{,k})\frac{\partial\tilde{t}}{\partial t}\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^i} \\
&+ (-\tilde{a}\tilde{B}_{,k})\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial t}\frac{\partial\tilde{t}}{\partial x^i} + \tilde{a}^2(\delta_{km}(1 + 2\tilde{\psi}) - 2\tilde{E}_{,km})\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial t}\frac{\partial\tilde{x}^m}{\partial x^i} \\
&= -(1 + 2\tilde{A})\left(1 + \frac{\partial\xi^0}{\partial t}\right)\frac{\partial\xi^0}{\partial x^i} - a\tilde{B}_{,k}\left(1 + \frac{\partial\xi^0}{\partial t}\right)(\delta_{ik} + \xi_{,ik}) \\
&- a\tilde{B}_{,k}\xi_{,k0}\xi^0_{,i} + a^2(\delta_{km}(1 + 2\tilde{\psi}) - 2\tilde{E}_{km})\xi_{,k0}(\delta_{ik} + \xi_{,ik}) \\
&= -\xi^0_{,i} - a\tilde{B}_{,i} + a^2\xi_{,i0}.
\end{aligned}$$

De fleste overgangene burde være greie å forstå hvis du husker at vi bare skal ha med ledd av nullte og første orden. Dette er også grunnen til at vi kan erstatte $\tilde{a}$ med a. Vi får altså:

$$a\tilde{B}_{,i} = aB_{,i} - \xi^0_{,i} + a^2\xi_{,i0},$$

slik at vi (på en uinteressant integrasjonskonstant nær) har

$$\tilde{B} = B - \frac{\xi^0}{a} + a\xi_{,0} = B - \frac{1}{a}\xi^0 + \dot{\xi}.$$

Så ser vi på ij-komponenten, med $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
-2a^2E_{,ij} &= \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial\tilde{x}^j} \\
&= -(1+2\tilde{A})\xi^0_{,i}\xi^0_{,j} - \tilde{a}\tilde{B}_{,k}\xi^0_{,i}(\delta_{kj} + \xi_{,kj}) \\
&- \tilde{a}\tilde{B}_{,k}(\delta_{ki} + \xi_{,ki})\xi^0_{,j} + \tilde{a}^2(\delta_{km}(1+2\tilde{\psi}) - 2\tilde{E}_{,km})(\delta_{ki} + \xi_{,ki})(\delta_{mj} + \xi_{,mj}) \\
&= a^2\delta_{ij}(1+2\psi) - 2a^2\tilde{E}_{,ij} + a^2\xi_{,ij} + a^2\xi_{,ij} \\
&= -2a^2\tilde{E}_{,ij} + 2a^2\xi_{,ij},
\end{aligned}$$

der vi i den siste overgangen har brukt at $i \neq j$. Vi får derfor at

$$-E_{,ij} = -\tilde{E}_{,ij} + \xi_{,ij}$$

som gir

$$\tilde{E} = E + \xi.$$

Til slutt ser vi på tilfellet $i = j$:

$$\begin{aligned}
a^2(1+2\psi) - 2a^2E_{,ii} &= -(1+2A)\left(\frac{\partial\tilde{t}}{\partial x^i}\right)^2 + 2(-\tilde{a}\tilde{B}_{,k})\frac{\partial\tilde{t}}{\partial x^i}\partial\tilde{x}^k\partial x^i \\
&+ \tilde{a}^2(\delta_{km}(1+2\tilde{\psi}) - 2\tilde{E}_{,km})\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial\tilde{x}^m}{\partial x^i} \\
&= \tilde{a}^2(\delta_{km}(1+2\tilde{\psi}) - 2\tilde{E}_{,km})(\delta_{ki} + \xi_{,ki})(\delta_{mi} + \xi_{,mi}) \\
&= \tilde{a}^2(1+2\tilde{\psi}) - 2a^2\tilde{E}_{,ii} + 2a^2\xi_{,ii}.
\end{aligned}$$

Bruker vi transformasjonsligningen for E, får vi at

$$\begin{aligned}
a^2(1+2\psi) &= \tilde{a}^2(1+2\tilde{\psi}) = a^2(1+H\xi^0)^2(1+2\tilde{\psi}) \\
&= a^2(1+2H\xi^0)(1+2\tilde{\psi}) = a^2(1+2H\xi^0+2\tilde{\psi}),
\end{aligned}$$

som gir

$$\tilde{\psi} = \psi - H\xi^0.$$

Vi kan velge ξ^0 og ξ fritt,og vi bruke denne friheten til å eliminere 2 av de 4 funksjonene som inngår i metrikken. Det er med andre ord bare to av A, B, ψ, E som har noen betydning. Av og til er det nyttig å ha tilgjengelig størrelser som ikke endrer seg under koordinattransformasjonen vi herjet med over, såkalte gaugeinvariante variable. To slike er

$$\begin{aligned}
\Phi_A &= A + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\eta}[a(\dot{E}-B)] = A + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{E}-B) + (\ddot{E}-\dot{B}) \\
\Phi_H &= -\psi + aH(B-\tilde{E}).
\end{aligned}$$

Merk at når vi skal transformere disse, så kan vi sette $\tilde{a}=a$, siden skalafaktoren multipliserer størrelser som allerede er av første orden. Det er forholdsvis enkelt å sjekke at disse to variablene er gaugeinvariante:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_A &= \tilde{A} + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\tilde{E}}-\tilde{B}) + (\ddot{\tilde{E}}-\dot{\tilde{B}}) \\
&= A - \frac{1}{a}\dot{\xi}^0 + \frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{E}+\dot{\xi}-B+\frac{\xi^0}{a}-\xi^0\right) \\
&+ \left(\ddot{E}+\ddot{\xi}-\dot{B}+\frac{\dot{\xi}^0}{a}-\frac{\dot{a}}{a^2}\xi^0-\ddot{\xi}\right) \\
&= A - \frac{1}{a}\dot{\xi}^0 + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{E}-B) + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi} + \frac{\dot{a}}{a^2}\xi^0 - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\xi} + (\ddot{E}-\dot{B}) + \frac{\dot{\xi}^0}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2}\xi^0 \\
&= A + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{E}-B) + (\ddot{E}-\dot{B}) \\
&= \Phi_A,
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_H &= -\tilde{\psi} + aH(\tilde{B}-\dot{\tilde{E}}) \\
&= -\psi + H\xi^0 + aH\left(B-\frac{\xi^0}{a}+\dot{\xi}-\dot{E}-\dot{\xi}\right) \\
&= -\psi + H\xi^0 - H\xi^0 + aH(B-\dot{E}) = -\psi + aH(B-\dot{E}) \\
&= \Phi_H.
\end{aligned}$$

I vår gauge har vi $E=B=0$, og $\Phi_A=\Psi$, $\Phi_H=-\Phi$.

De som vil dille videre med dette, kan lage gaugeinvariante størrelser av variablene som inngår i energi-impulstensoren også. Utgangspunktet er transformasjonsligningen

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}(\tilde{x})\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} = T_{\mu\nu}(x),$$

og man kan vise at størrelsene

$$\begin{aligned}
V &= ikB + \frac{\hat{k}^i T^0_i}{a(\rho+\mathcal{P})} \\
\epsilon_m &= -1 - \frac{T^0_0}{\rho} + \frac{3H}{k^2\rho}k^i T^0_i
\end{aligned}$$

er gaugeinvariante. Ligningene er her skrevet ned i fourierrommet, og $\mathcal{P}$ er trykket.

Vår triumf er nå komplett: vi har alle ligningene vi trenger for å kunne regne på hvordan perturbasjonene vil utvikle seg i tiden på forskjellige lengdeskalaer. Men differensialligninger trenger initialbetingelser, og neste oppgave er derfor å finne ut hvor de kommer fra og hva de er.