Kosmologisk perturbasjonsteori: I ditt ansikts sved skal du ete ditt brød

Vi skal nå gjennomgå en tålmodighetsprøve. Jeg håper at det skal komme ut noe fysikk til slutt, men først og fremst er det som følger en grisejobb. La oss begynne.

Boltzmannligningen for fotoner

Boltzmannligningen er generelt

$$\frac{df}{dt} = C[f].$$

Vi skal først regne ut venstresiden, deretter høyresiden. Begge deler til første orden i perturbasjonene. Gled dere.

Den perturberte metrikken vi skal se på er

$$ds^2 = -(1+2\Psi)dt^2 + a^2(t)(1+2\Phi)(dx^2+dy^2+dz^2).$$

Fordelingsfunksjonen f avhenger av $x^\mu = (t,x,y,z)$ og firerimpulsen $P^\mu = dx^\mu/d\lambda$, der λ er en parameter som varierer monotont langs banen til fotonet, $x^\mu = x^\mu(\lambda)$. Banen er bestemt av geodetligningen, som igjen avhenger av metrikken. Vi vet at fotonet er masseløst, og det gir oss en føring på firerimpulsen:

$$P^2 = g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = 0.$$

Setter vi inn for metrikken, gir dette

$$-(1+2\Psi)(P^0)^2 + g_{ij}P^iP^j = 0.$$

Vi innfører $p^2 = g_{ij}P^iP^j$, og ser da at

$$P^0 = \frac{p}{(1+2\Psi)^{1/2}} = p(1-\Psi).$$

Den siste likheten gjelder bare til første orden i Ψ. Vi er interessert i å sette opp ligningene for førsteordens perturbasjonsteori, og vi skal derfor konsekvent rekkeutvikle alle funksjoner av Ψ og Φ til første orden. Jeg kommer til å bruke likhetstegn i slike overganger, selv om de strengt tatt bare er gyldige til første orden. I den newtonske grensen er Ψ gravitasjonspotensialet, som er lik $-GM/r$ for en sfærisk kilde. Dette indikerer at jo tettere et område er, jo mer negativ er Ψ. Siden P^0 gir energien til fotonet, ser vi at fotonet mister energi når det beveger seg ut av et tett område. Det virker fornuftig.

Siden P^0 via relasjonen over er bestemt av p, trenger vi ikke ta med denne frihetsgraden i f. Vi lar f avhenge av p og dens retning, definert av enhetsvektoren med komponenter $\hat{p}^i = \hat{p}_i$, der $\delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j = 1$. Da kan vi skrive df/dt som

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i}\frac{d\hat{p}^i}{dt}.$$

Men i det siste leddet er begge faktorene av første orden i perturbasjonene. Til laveste orden er nemlig $f = f(p) = 1/(e^{p/T} - 1)$, dvs. bare en funksjon av p, og ikke av retningen til bevegelsesmengden. Og i fraværet av perturbasjoner er det ingenting som får fotonet til å endre retning, slik at $d\hat{p}^i/dt$ må være av minst første orden i perturbasjonene. Dermed er dette leddet totalt av minst 2. orden, og kan derfor neglisjeres i førsteordens perturbasjonsteori. De andre leddene vil imidlertid bidra, og nå må vi først bestemme dx^i/dt. Siden $P^i = dx^i/d\lambda$ og $P^0 = dt/d\lambda$, har vi at

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{P^i}{P^0}.$$

Men vi har også at den $i$te komponenten av P må være lik et tall C ganget med enhetsvektor i den $i$te retningen,

$$P^i = C\hat{p}^i.$$

Det gir oss at

$$\begin{aligned} p^2 &= g_{ij}C^2\hat{p}^i\hat{p}^j = a^2(1+2\Phi)\delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^jC^2 \\ &= a^2(1+2\Phi)C^2 \end{aligned}$$

som fører til at

$$p = a(1+2\Phi)^{1/2}C = a(1+\Phi)C,$$

og dermed

$$C = \frac{p}{a}\frac{1}{1+\Phi} = \frac{p}{a}(1-\Phi).$$

Dette viser at vi har

$$P^i = p\hat{p}^i\frac{1-\Phi}{a},$$

og da finner vi at

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{P^i}{P^0} = \frac{p\hat{p}^i(1-\Phi)/a}{p(1-\Psi)} \\ &= \frac{\hat{p}^i}{a}(1-\Phi)(1+\Psi), \end{aligned}$$

og ganger vi ut parentesen samtidig som vi stryker ledd av høyere orden enn første i perturbasjonene, så ender vi opp med

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\hat{p}^i}{a}(1+\Psi-\Phi).$$

Denne faktoren skal multipliseres med $\partial f/\partial x^i$. Igjen ser vi at til laveste orden er f uavhengig av x^i, slik at $\partial f/\partial x^i$ må være av minst første orden i perturbasjonene. Vi kan derfor neglisjere Φ og Ψ i uttrykket for dx^i/dt, fordi produktet av $\partial f/\partial x^i$ med disse vil være av minst 2. orden. Dermed har vi så langt funnet

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt}.$$

Vi må nå regne ut dp/dt. Vi starter med geodetligningen

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}.$$

Siden $P^\mu = dx^\mu/d\lambda$, kan vi skrive denne som

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta.$$

Vi ser videre på $\mu = 0$-komponenten:

$$\frac{dP^0}{d\lambda} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta.$$

Deretter skriver vi

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda}\frac{d}{dt} = P^0\frac{d}{dt} = p(1-\Psi)\frac{d}{dt}.$$

Dermed kan ligningen skrives slik:

$$p(1-\Psi)\frac{d}{dt}[p(1-\Psi)] = -\Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta.$$

Så

$$\frac{d}{dt}[p(1-\Psi)] = -\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p}(1-\Psi)^{-1} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p}(1+\Psi),$$

og

$$\frac{dp}{dt}(1-\Psi) - p\frac{d\Psi}{dt} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p}(1+\Psi).$$

Ganger vi hele ligningen med $1+\Psi$ vil det første leddet på venstresiden bli redusert til dp/dt, siden $(1-\Psi)(1+\Psi) = 1-\Psi^2 = 1$ til første orden i Ψ. I det andre leddet på venstredsiden blir vi stående igjen med $pd\Psi/dt$, siden $d\Psi/dt$ allerede er av første orden i perturbasjonene. Dermed får vi at

$$\frac{dp}{dt} = p\frac{d\Psi}{dt} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p}(1+\Psi)^2 = p\frac{d\Psi}{dt} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p}(1+2\Psi).$$

Siden $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$, får vi at

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i},$$

der vi har brukt resultatet for dx^i/dt, og husket på at alle andreordensledd skal strykes. Dermed:

$$\frac{dp}{dt} = p\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right) - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p}(1+2\Psi).$$

Vi har at Christoffelsymbolet er gitt ved

$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{g^{0\nu}}{2}\left[\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right],$$

der vi husker at $g^{\mu\nu}$ som matrise betraktet er den inverse til $g_{\mu\nu}$. Produktet $P^\alpha P^\beta$ som vi skal multiplisere med og summere over α og β, er symmetrisk under ombytte av α og β. De to første leddene i klammeparentesen vil derfor gi samme bidrag: starter vi med

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}P^\alpha P^\beta = \sum_\alpha\sum_\beta \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}P^\alpha P^\beta,$$

så kan vi bytte om summasjonsindeksene α og β og få

$$\sum_\alpha\sum_\beta \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}P^\alpha P^\beta = \sum_\beta\sum_\alpha \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha}P^\beta P^\alpha = \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha}P^\alpha P^\beta.$$

Derfor kan vi skrive

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p} = \frac{g^{0\nu}}{2}\left(2\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right)\frac{P^\alpha P^\beta}{p}.$$

Nå er $g_{\mu\nu}$ og $g^{\mu\nu}$ diagonale, slik at i summasjonen over ν er det bare leddet med $\nu = 0$ som gir bidrag:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p} &= \frac{g^{00}}{2}\left(2\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)\frac{P^\alpha P^\beta}{p} \\
&= -(1-2\Psi)\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\right)\frac{P^\alpha P^\beta}{p}.
\end{aligned}$$

Videre har vi at

$$g_{0\alpha} = -\delta_{0\alpha}(1+2\Psi),$$

slik at

$$\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta} = -2\delta_{0\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial x^\beta},$$

og

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{P^\alpha P^\beta}{p} &= -\frac{\partial g_{00}}{\partial t}\frac{P^0 P^0}{p} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\frac{P^i P^j}{p} \\
&= 2\frac{\partial \Psi}{\partial t}p - \delta_{ij}\left[\frac{\partial}{\partial t}a^2(1+2\Phi)\right]\frac{P^i P^j}{p} \\
&= 2\frac{\partial \Psi}{\partial t}p - \delta_{ij}\left[2a\dot{a}(1+2\Phi) + 2a^2\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]\frac{P^i P^j}{p} \\
&= 2\frac{\partial \Psi}{\partial t}p - a^2\delta_{ij}\left[2\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2H(1+2\Phi)\right]\frac{P^i P^j}{p}
\end{aligned}$$

Men

$$\delta_{ij}P^iP^j = \delta_{ij}p^2\hat{p}^i\hat{p}^j\frac{(1-\Phi)^2}{a^2} = \frac{p^2(1-2\Phi)}{a^2},$$

så

$$-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{P^\alpha P^\beta}{p} = 2\frac{\partial\Psi}{\partial t}p - \left[2\frac{\partial\Phi}{\partial t} + 2H(1+2\Phi)\right]p(1-2\Phi).$$

Videre:

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p} &= 2(-2)\delta_{0\alpha}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p} \\
&= -4\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}\frac{P^0P^\beta}{p} = -4\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}\frac{p(1-\Psi)P^\beta}{p} \\
&= -4\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}P^\beta.
\end{aligned}$$

Dermed:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p} &= \frac{-1+2\Psi}{2}\left\{-4\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}P^\beta + 2\frac{\partial\Psi}{\partial t}p - \left[2\frac{\partial\Phi}{\partial t} + 2H(1+2\Phi)\right]p(1-2\Phi)\right\} \\
&= \frac{-1+2\Psi}{2}\left(-4\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}P^\beta + 2\frac{\partial\Psi}{\partial t}p - 2\frac{\partial\Phi}{\partial t}p - 2Hp + 4Hp\Phi - 4Hp\Phi\right) \\
&= \frac{-1+2\Psi}{2}\left(-4\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}P^\beta + 2\frac{\partial\Psi}{\partial t}p - 2\frac{\partial\Phi}{\partial t}p - 2Hp\right) \\
&= \frac{-1+2\Psi}{2}\left[-4\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}P^0 + P^i\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right) + 2p\frac{\partial\Psi}{\partial t} - 2p\frac{\partial\Phi}{\partial t} - 2Hp\right] \\
&= \frac{-1+2\Psi}{2}\left[-4\left(p\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right) + 2p\frac{\partial\Psi}{\partial t} - 2p\frac{\partial\Phi}{\partial t} - 2Hp\right] \\
&= (-1+2\Psi)\left[-2p\frac{\partial\Psi}{\partial t} - 2\frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} + p\frac{\partial\Psi}{\partial t} - p\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + H\right)\right] \\
&= (-1+2\Psi)\left[-p\frac{\partial\Psi}{\partial t} - 2\frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} - p\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + H\right)\right].
\end{aligned}$$

Setter inn i ligningen for dp/dt:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= p\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{p}(1+2\Psi) \\
&= p\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} + (1+2\Psi)(1-2\Psi)\left[-p\frac{\partial\Psi}{\partial t} - 2\frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} - p\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + H\right)\right] \\
&= p\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{p}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} - p\frac{\partial\Psi}{\partial t} - 2\frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} - p\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + H\right) \\
&= -\frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} - p\frac{\partial\Phi}{\partial t} - pH,
\end{aligned}$$

det vil si

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = -\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - H.$$

Dette kan vi sette inn i uttrykket for df/dt:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial f}{\partial x^i} + p\frac{\partial f}{\partial p}\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial f}{\partial x^i} - p\frac{\partial f}{\partial p}\left[H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right]. \qquad (1)\end{aligned}$$

Men dette var bare begynnelsen!

Nå må vi velge en form for fordelingsfunksjonen f for å komme videre. Vi ser på små perturbasjoner rundt en homogen fotongass, så vi forventer at Bose-Einsteinfordelingen skal være en god tilnærming. Motivert av dette kan vi prøve oss med

$$f(\mathbf{x}, p, \hat{p}, t) = \left\{\exp\left[\frac{p}{T(t)(1+\Theta(\mathbf{x}, \hat{p}, t))}\right] - 1\right\}^{-1}.$$

Det er en antagelse som er gjort her om at Θ ikke avhenger av p. Dette funker fordi p ikke endres i kollisjoner mellom fotoner og ikke-relativistiske elektroner og protoner. Med dette in mente kan vi nå Taylorutvikle f rundt $\Theta = 0$ til første orden i Θ:

$$\begin{aligned}f &\approx f(\Theta = 0) + \left[\frac{\partial f}{\partial T}\right]_{\Theta=0} T\Theta \\ &= \frac{1}{e^{p/T} - 1} + \left[\frac{\partial}{\partial T}(e^{p/T} - 1)^{-1}\right] T\Theta. \qquad (2)\end{aligned}$$

Vi skriver $f^{(0)} = 1/(e^{p/T} - 1)$ og ser at

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} = -\frac{1}{(e^{p/T} - 1)^2}\left(-\frac{p}{T^2}\right) e^{p/T} = \frac{p}{T^2}\frac{e^{p/T}}{(e^{p/T} - 1)^2},$$

og

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} = -\frac{1}{(e^{p/T} - 1)^2}\frac{1}{T}e^{p/T} = -\frac{T}{p}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T},$$

slik at

$$T\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} = -p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}.$$

Dermed:

$$f = f^{(0)} - p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta.$$

Vi kan nå sette inn denne rekkeutviklingen i uttrykket vi fant for df/dt. Vi vil da få noen ledd som ikke inneholder Φ, Ψ eller Θ. Dette er ledd av 0te orden i perturbasjonene. I Dodelson er det vist hvordan disse leddene til sammen gir ligingen $dT/dT/T = -da/dt/a$, som igjen gir det gode, gamle resultatet $T \propto 1/a$. Vi går videre til første orden. Vi får da

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left[p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta\right] + \frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta\right]$$

$$
\begin{aligned}
&-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\left[H+\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right]+p\frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta\right]H \\
= & \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}H\right)-p\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta\right] \\
&-\frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right] \\
&+Hp\frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta\right] \\
= & -p\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta\right]-\frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \\
&+Hp\Theta\frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\right]-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right].
\end{aligned}
$$

Vi ser nærmere på det første leddet:

$$
\begin{aligned}
-p\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta\right] &= -p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\partial\Theta}{\partial t}-p\Theta\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \\
&= -p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\partial\Theta}{\partial t}-p\Theta\frac{dT}{dt}\frac{\partial^2 f^{(0)}}{\partial p\partial T} \\
&= -p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\partial\Theta}{\partial t}-p\Theta\frac{dT}{dt}\frac{\partial}{\partial p}\left[-\frac{p}{T}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\right] \\
&= -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\partial\Theta}{\partial t}+p\Theta\frac{dT/dt}{T}\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\right).
\end{aligned}
$$

Så førsteordensbidraget til df/dt blir (husk at vi fra 0te orden har $(dT/dt)/T = -H$):

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dt} = & -p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\frac{\partial\Theta}{\partial t}+p\Theta\frac{dT/dt}{T}\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\right) \\
&-\frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}+Hp\Theta\frac{\partial}{\partial p}\left[p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\right] \\
&-p\frac{\partial f^0}{\partial p}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right].
\end{aligned}
$$

Dermed, og endelig:

$$
\frac{df}{dt}=-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right].
$$

Kollisjonsleddet (orienteringsstoff)

Men det er ikke over ennå. Fotonene vekselvirker med elektronene via Compton-spredning, så Boltzmannligningen har et kollisjonsledd. Dette må vi nå regne ut til første orden i perturbasjonene. Comptonspredning er prosessen

$$e^-(\vec{q}) + \gamma(\vec{p}) \rightarrow e^-(\vec{q'}) + \gamma(\vec{p'}).$$

I det følgende skal vi regne ut kollisjonsleddet fra denne prosessen, i grensen der fotonenergien er mye mindre enn elektronets hvileenergi. Beregningen er ganske komplisert, og du trenger ikke å skjønne alle detaljene. Et enkelt, men viktig poeng som vi kan lese ut av kinematikken til prosessen, bør du imidlertid ta med deg: i grensen vi ser på, vil spredningsprosessen ikke endre størrelsen på fotonets bevegelsesmengde, bare retningen. Dersom vi ser på prosessen i referansesystemet der elektronet til å begynne med er i ro ($q = 0$), finner vi ved å kreve bevaring av energi og bevegelsesmengde at

$$p' = \frac{p}{1 + \frac{p}{m}(1 - \cos\theta)},$$

der θ er vinkelen mellom $\vec{p}$ og $\vec{p'}$. I grensen $p \ll m$, ser vi da at $p' \approx p$.

Kollisjonsleddet er på formen

$$\begin{aligned}
C[f(\vec{p})] &= \frac{1}{p}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q(q)} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E(p')} |\mathcal{M}|^2 \\
&\times\ (2\pi)^4 \delta(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p'} - \vec{q'}) \delta(E(p) + E_e(q) - E(p') - E_e(q')) \\
&\times\ [f_e(\vec{q'}) f(\vec{p'}) - f_e(\vec{q}) f(\vec{p})].
\end{aligned}$$

Fotonene er ultrarelativistiske slik at $E(p) = p$, mens elektronene er ikke-relativistiske og oppfyller

$$E_(q) \approx m_e + \frac{q_e^2}{2m_e},$$

der det siste leddet er en liten korreksjon til det første. Da kan vi skrive

$$\begin{aligned}
C[f(\vec{p})] &= \frac{1}{p}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2m_e} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2m_e} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p'} |\mathcal{M}|^2 \\
&\times\ (2\pi)^4 \delta(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p'} - \vec{q'}) \delta\left(p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{q'^2}{2m_e}\right) \\
&\times\ [f_e(\vec{q'}) f(\vec{p'}) - f_e(\vec{q}) f(\vec{p})] \\
&= \frac{1}{p}\frac{1}{2m_e}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2m_e}\frac{1}{2}(2\pi)^4 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'} |\mathcal{M}|^2 \\
&\times\ \delta\left(p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p'})^2}{2m_e}\right) \\
&\times\ [f_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{q'}) f(\vec{p'}) - f_e(\vec{q}) f(\vec{p})] \\
&= \frac{\pi}{4m_e^2 p} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'} |\mathcal{M}|^2 \delta\left(p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\vec{q} + \vec{p} - \vec{p'})^2}{2m_e}\right) \\
&\times\ [f_e(\vec{q} + \vec{p} - \vec{q'}) f(\vec{p'}) - f_e(\vec{q}) f(\vec{p})].
\end{aligned}$$

Energien som overføres til elektronet i kollisjonen er

$$
\begin{aligned}
E_e(q) - E_e(\vec{q}+\vec{p}-\vec{p'}^2) &= \frac{q^2}{2m_e} - \frac{(\vec{q}+\vec{p}-\vec{p}')^2}{2m_e} \\
&= \frac{q^2 - q^2 - (\vec{p}-\vec{p}')^2 - 2\vec{q}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')}{2m_e} \\
&\approx \frac{(\vec{p}'-\vec{p})\cdot\vec{p}}{m_e},
\end{aligned}
$$

der q er mye større enn både p og p'. Det betyr at energioverføringen i kollisjonen er liten i forhold til de andre energiene som er involvert i kollisjonsprosessen. Da kan vi Taylorutvikle deltafunksjonen (i den grad det gir noen matematisk mening):

$$
\begin{aligned}
\delta\left(p + \frac{q^2}{2m_e} - p' - \frac{(\vec{q}+\vec{p}-\vec{p}')^2}{2m_e}\right) &= \delta(p - p' - (E_e(q') - E_e(q))) \\
&= \delta(p-p') + [E_e(q') - E_e(q)]\frac{\partial}{\partial E_e(q')}\left[\delta(p + E_e(q) - p' - E_e(q'))\right]_{E_e(} \\
&= \delta(p-p') + \frac{(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{q}}{m_e}\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'},
\end{aligned}
$$

der vi har brukt at

$$\frac{\partial f(x-y)}{\partial x} = -\frac{\partial f(x-y)}{\partial y}.$$

Vi gjør også tilnærmingen

$$f_e(\vec{q}+\vec{p}-\vec{p}') \approx f_e(\vec{q}),$$

og da blir

$$
\begin{aligned}
C[f(\vec{p})] &= \frac{\pi}{4m_e^2 p}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 p'}|\mathcal{M}|^2\left[\delta(p-p') + \frac{(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{q}}{m_e}\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right][f_e(\vec{q})f(\vec{p}') - f_e(\vec{q})f(\vec{p})] \\
&= \frac{\pi}{4m_e^2 p}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}f_e(\vec{q})\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'}|\mathcal{M}|^2\left[\delta(p-p') + \frac{(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{q}}{m_e}\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right][f(\vec{p}') - f(\vec{p})].
\end{aligned}
$$

For å komme videre, trenger vi å vite amplituden $\mathcal{M}$ for Comptonspredning. Denne avhenger generelt både av vinkelen mellom bevegelsesretningen til det innkommende og det utgående fotonet, og av deres polarisasjonsvektorer. Vi følger imidlertid Dodelson og setter spredningsamplituden lik en konstant. Såvidt jeg kan skjønne, må dette svare til å si at Comptonspredning og Thomsonspredning er det samme når elektronene har liten energi. I Dodelsons enheter er da $|\mathcal{M}|^2 = 8\pi\sigma_{\mathrm{T}}m_e^2$. Jeg har vært for lat til å finne ut av hvorfor konstantene foran σ_{T} velges akkurat slik. Men uavhengig av min latskap får vi da

$$
C[f(\vec{p})] = \frac{\pi}{4m_e^2 p}8\pi\sigma_{\mathrm{T}}m_e^2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^2}f_e(\vec{q})\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 p'}\left[\delta(p-p') + \frac{(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{q}}{m_e}\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\pi^2\sigma_{\mathrm{T}}}{p}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^2}f_e(\vec{q})\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3p'}\left[\delta(p-p')+\frac{(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{q}}{m_e}\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right]\\
&= \frac{2\pi^2\sigma_{\mathrm{T}}}{p}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3p'}\left[\delta(p-p')\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}f_e(\vec{q})+\frac{\vec{p}-\vec{p}'}{m_e}\cdot\left(\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}f_e(\vec{q})\vec{q}\right)\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right][f(\vec{p}')-f\\
&= \frac{2\pi^2\sigma_{\mathrm{T}}}{p}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3p'}\left[n_e\delta(p-p')+\frac{(\vec{p}-\vec{p}')}{m_e}\cdot n_e\langle\vec{q}\rangle\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right][f(\vec{p}')-f(\vec{p})]\\
&= \frac{2\pi^2\sigma_{\mathrm{T}}}{p}n_e\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3p'}\left[\delta(p-p')+(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{v}_b\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right][f(\vec{p}')-f(\vec{p})].
\end{aligned}
$$

Vi setter nå inn rekkeutviklingen av fotonenes fordelingsfunksjon. Da blir

$$
f(\vec{p}')-f(\vec{p})=f^{(0)}(p')-f^{(0)}(p)-p'\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'}\Theta(\hat{p}')+p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta(\hat{p}),
$$

og

$$
\begin{aligned}
C[f(\vec{p})] &= \frac{2\pi^2n_e\sigma_{\mathrm{T}}}{p}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3p'}\left[\delta(p-p')+(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{v}_b\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right]\\
&\times \left[(f^{(0)}(p')-f^{(0)}(p))-p'\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'}\Theta(\hat{p}')+p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta(p)\right]\\
&= \frac{n_e\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi p}\int_0^\infty dp'p'\int d\Omega_{p'}\\
&\times \left[\delta(p-p')\left(-p'\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'}\Theta(\hat{p}')+p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta(\hat{p})\right)+(f^{(0)}(p')-f^{(0)}(p))(\vec{p}-\vec{p}')\cdot v_b\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}\right].
\end{aligned}
$$

Vi innfører størrelsen

$$
\Theta_0(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi}\int d\Omega_{p'}\Theta(\hat{p}',\vec{x},t),
$$

og legger merke til at siden $\vec{v}_b$ er konstant under integrasjonene, kan vi velge og legge ${p'}_z$-aksen langs denne og få

$$
\int d\Omega_{p'}\vec{p}'\cdot\vec{v}_b=2\pi v_bp'\int_{-1}^{+1}d(\cos\theta)\cos\theta=0.
$$

Da finner vi, ved å bruke delvis integrasjon i integralet som inneholder den deriverte av deltafunksjonen,

$$
\begin{aligned}
C[f(\vec{p})] &= \frac{n_e\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi p}\int_0^\infty dp'p'[\delta(p-p')\left(-p'\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p'}4\pi\Theta_0+4\pi p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\Theta(\hat{p})\right)\\
&+ 4\pi(f^{(0)}(p')-f^{(0)}(p))\vec{p}\cdot\vec{v}_b\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}]\\
&= \frac{n_e\sigma_{\mathrm{T}}}{p}p\left(-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\left[\Theta_0-\Theta(\hat{p})\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad n_e\sigma_{\mathrm{T}}\frac{\vec{p}}{p}\cdot\vec{v}_b\int_0^\infty dp'\frac{\partial\delta(p-p')}{\partial p'}p'(f^{(0)}(p')-f^{(0)}(p)) \\
&= \quad \left(-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\right)n_e\sigma_{\mathrm{T}}[\Theta_0-\Theta(\hat{p})] \\
&+ \quad n_e\sigma_{\mathrm{T}}\hat{p}\cdot\vec{v}_b\left[-\int_0^\infty dp'\delta(p-p')\frac{\partial}{\partial p'}[p'(f^{(0)}(p')-f^{(0)}(p))]\right] \\
&= \quad \left(-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\right)n_e\sigma_{\mathrm{T}}[\Theta_0-\Theta(\hat{p})] \\
&+ \quad n_e\sigma_{\mathrm{T}}\hat{p}\cdot\vec{v}_b\left[-\int_0^\infty dp'\delta(p-p')\left((f^{(0)}(p')-f^{(0)}(p))+p'\frac{\partial f^{(0)}(p')}{\partial p'}\right)\right] \\
&= \quad -p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}n_e\sigma_{\mathrm{T}}\left[\Theta_0-\Theta(\hat{p})+\hat{p}\cdot\vec{v}_b\right].
\end{aligned}
$$

Boltzmannligningen for fotoner, fiks ferdig

Dermed er vi endelig ferdige med kollisjonsleddet. Nå trenger vi bare å sette dette lik førsteordensresultatet for df/dt:

$$
-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right]=-p\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p}n_e\sigma_{\mathrm{T}}\left[\Theta_0-\Theta(\hat{p})+\hat{p}\cdot\vec{v}_b\right],
$$

det vil si

$$
\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\hat{p}^i}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}=n_e\sigma_{\mathrm{T}}[\Theta_0-\Theta(\hat{p})+\hat{p}\cdot\vec{v}_b].
$$

Men tror du vi er fornøyde med dette? At vi endelig kan slappe av? Selvfølgelig ikke. Nå skal vi først innføre konform tid, $d\eta = dt/a$, slik at alle $1/a$-faktorene i ligningen forsvinner. Da blir den seende slik ut:

$$
\dot{\Theta}+\hat{p}^i\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}+\dot{\Phi}+\hat{p}^i\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}=n_e\sigma_{\mathrm{T}}a[\Theta_0-\Theta+\hat{p}\cdot\vec{v}_b],
$$

der prikkede størrelser er derivert med hensyn på konform tid. Denne ligningen er en partiell diffligning, men ved å fouriertransformere kan vi gjøre den om til en ordinær (egentlig: et sett av uavhengige ordinære diffligninger). Vi innfører den fouriertransformerte av en størrelse som

$$
\Theta(\mathbf{x})=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\tilde{\Theta}(\vec{k}),
$$

og tilsvarende for andre størrelser. Setter vi dette inn i ligningen, og innfører $\mu=\vec{k}\cdot\hat{p}/k$, kan ligningen skrives som

$$
\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\left(\dot{\tilde{\Theta}}+ik\mu\tilde{\Theta}+\dot{\tilde{\Phi}}+ik\mu\tilde{\Psi}\right)=n_e\sigma_{\mathrm{T}}a\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\left(\tilde{\Theta}_0-\tilde{\Theta}+\hat{p}\cdot\tilde{\vec{v}}_b\right).
$$

Dodelson antar så at $\tilde{\vec{v}}_b \cdot \hat{p} = \tilde{v}_b \mu$, og innfører den optiske dybden ved

$$\tau(\eta) = \int_\eta^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_\mathrm{T} a,$$

slik at $\dot{\tau} = -n_e \sigma_\mathrm{T} a$. Da får vi endelig

$$\dot{\Theta} + ik\mu\Theta + \dot{\Phi} + ik\mu\Psi = -\dot{\tau}(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b),$$

der vi nå har fulgt Dodelson og droppet tilder over fouriertransformerte størrelser. Dette er Boltzmannlignignen for fotoner til første orden i perturbasjonene. Hurra.

Boltzmannligningen for kald mørk materie

Etter denne strålende triumfen går vi med stort mot løs på Boltzmannligningen for kald mørk materie (CDM). Det er to viktige forskjeller mellom CDM og fotoner: CDM-partiklene er ikke-relativistiske, og de vekselvirker så svakt seg imellom og med andre partikler at de kan regnes som kollisjonsløse. Dermed slipper vi i det minste, o fryd, å regne ut et kollisjonsledd for dem. Ellers er gangen i greiene ganske lik som for fotonene, ihvertfall i starten. Først av alt må vi se litt på kinematikken. Fordi CDM-partiklene er massive (med masse m) så har vi at

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu &= -m^2, \\ E &= \sqrt{p^2 + m^2} \\ p &\equiv g_{ij} P^i P^j. \end{aligned}$$

Ved å sette inn for metrikken får vi da

$$-m^2 = -(1 + 2\Psi)(P^0)^2 + p^2,$$

som gir

$$P^0 = \frac{E}{\sqrt{1 + 2\Psi}} = E(1 - \Psi).$$

Siden $P^i = C\hat{p}^i$, med $\delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j = 1$ finner vi at

$$\begin{aligned} p^2 &= g_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j C^2 = a^2 \delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j(1 + 2\Phi)C^2 \\ &= a^2(1 + 2\Phi)C^2, \end{aligned}$$

slik at

$$C = \frac{p}{a}(1 + 2\Phi)^{-1/2} = \frac{p}{a}(1 - \Phi),$$

og dermed kan vi skrive

$$P^\mu = \left[E(1 - \Psi), p\hat{p}^i \frac{1 - \Phi}{a} \right].$$

Dodelson velger å bruke E som variabel i dette tilfellet og skriver

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial E}\frac{dE}{dt}.$$

Igjen har vi sløyfet et leddet som inneholder den deriverte av f med hensyn på $\hat{p}^i$, siden dette leddet er av andre orden i perturbasjonene. Vi må nå gå gjennom det samme dillet som for fotonene for å regne ut leddene i dette uttrykket. Først av alt, siden

$$P^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$$

og

$$P^0 = \frac{dt}{d\lambda}$$

finner vi at

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{P^i}{P^0} = \frac{p\hat{p}^i}{aE}(1+\Psi-\Phi).$$

For å bestemme den andre koeffisienten, må vi igjen ty til geodetligningen:

$$\frac{dP^0}{d\lambda} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta,$$

som kan skrives

$$\frac{dt}{d\lambda}\frac{dP^0}{dt} = P^0\frac{dP^0}{dt} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta.$$

Venstresiden blir dermed

$$E(1-\Psi)\frac{d}{dt}[E(1-\Psi)] = E\frac{dE}{dt}(1-2\Psi) - E^2\frac{d\Psi}{dt},$$

og ved å skrive ut $d\Psi/dt$ som i fotontilfellet og så gange ligingen med $(1+\Psi)$ får vi at

$$\frac{dE}{dt} = E\left[\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{aE}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}\right] - \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E}(1+2\Psi).$$

Bare barnemat. Men nå blir det værre:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} &= \frac{g^{0\nu}}{2}\left(2\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right)\frac{P^\alpha P^\beta}{E} \\
&= \frac{-1+2\Psi}{2}\left(2\frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\right)\frac{P^\alpha P^\beta}{E} \\
&= \frac{-1+2\Psi}{2}\left(-4\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}\frac{P^0 P^\beta}{E} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{P^\alpha P^\beta}{E}\right) \\
&= \frac{-1+2\Psi}{2}\left(-4\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}(1-\Psi)P^\beta - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{P^\alpha P^\beta}{E}\right) \\
&= \frac{-1+2\Psi}{2}\left(-4\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}P^\beta - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{P^\alpha P^\beta}{E}\right).
\end{aligned}$$

Vi regner så litt på det siste leddet i parentesen:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} &= -\frac{\partial g_{00}}{\partial t}\frac{P^0 P^0}{E} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\frac{P^i P^j}{E} \\
&= 2\frac{\partial \Psi}{\partial t}E - a^2\delta_{ij}\left(2\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2H(1+2\Phi)\right)\frac{P^i P^j}{E}.
\end{aligned}
$$

Vi har at

$$
\delta_{ij}P^i P^j = \frac{p^2(1-2\Phi)}{a^2},
$$

så

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} &= 2\frac{\partial \Psi}{\partial t}E - \left(2\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2H(1+2\Phi)\right)\frac{p^2}{E}(1-2\Phi) \\
&= 2\frac{\partial \Psi}{\partial t}E - \frac{p^2}{E}\left(2\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2H\right).
\end{aligned}
$$

Dermed får vi at

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{P^\alpha P^\beta}{E} &= \frac{-1+2\Phi}{2}\left[-4\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}P^0 + \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}P^i\right) + 2\frac{\partial \Psi}{\partial t}E - \frac{p^2}{E}\left(2\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2H\right)\right] \\
&= \frac{-1+2\Psi}{2}\left[-4\frac{\partial \Psi}{\partial t}E - 4\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a} + 2\frac{\partial \Psi}{\partial t}E - 2\frac{p^2}{E}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - 2\frac{p^2}{E}H\right] \\
&= (-1+2\Psi)\left[-\frac{\partial \Psi}{\partial t}E - 2\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a} - \frac{p^2}{E}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H\right)\right].
\end{aligned}
$$

Det gir

$$
\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= E\frac{\partial \Psi}{\partial t} + E\frac{p\hat{p}^i}{aE}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \\
&+ (1-2\Psi)\left[-\frac{\partial \Psi}{\partial t}E - 2\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a} - \frac{p^2}{E}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H\right)\right](1+2\Psi) \\
&= E\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial \Psi}{\partial t}E - 2\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\frac{p\hat{p}^i}{a} - \frac{p^2}{E}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{p^2}{E}H \\
&= -\frac{p^2}{E}\frac{da/dt}{a} - \frac{p^2}{E}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}.
\end{aligned}
$$

Da kan vi endelig sette opp Boltzmannligningen for kald mørk materie:

$$
\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{aE}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial E}\left(\frac{da/dt}{a}\frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\right) = 0.
$$

Veien videre fra denne ligningen er litt annerledes enn for fotoner. Siden partiklene er ikke-relativistiske, kan vi neglisjere ledd av orden $(p/E)^2$ og høyere. Da viser det seg at hvis vi tar momenter av Boltzmannligningen reduseres den til to koblede hydrodynamiske ligninger. Først integrerer vi rett og slett ligningnen over $\vec{p}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f \frac{p\hat{p}^i}{E} \\ &- \left(\frac{da/dt}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f}{\partial E}\frac{p^2}{E} - \frac{1}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f}{\partial E} p\hat{p}^i. \end{aligned}$$

Det siste integralet er forskjellig fra null kun for den perturberte delen av f, siden f til nullte orden ikke avhenger av retningen på p, og $\hat{p}^i$ alene integrert over alle retninger gir null. Det betyr at dette leddet er av minst 2. orden i perturbasjonene og dermed kan strykes. Så husker vi på at

$$\begin{aligned} n &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f \\ v^i &= \frac{1}{n}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f \frac{p\hat{p}^i}{E} \end{aligned}$$

(husk at hastigheten til en partikkel er gitt ved $\vec{v} = \vec{p}/E$. Dette er motivert av at vi i spesiell relativitetsteori har $E = \gamma m$ og $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, der $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$.) Da gir den integrerte utgaven av Boltzmannligningen at

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}(nv^i) - \left(\frac{da/dt}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f}{\partial E}\frac{p^2}{E} = 0.$$

Det siste integralet må vi gjøre noe med. Siden $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ har vi

$$\frac{dE}{dp} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} = \frac{p}{E},$$

og dermed

$$\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dE} = \frac{E}{p}\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Det gir oss at

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f}{\partial E}\frac{p^2}{E} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f}{\partial p} p = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dp p^3 \frac{\partial f}{\partial p} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\left\{\left[p^3 f\right]_0^\infty - 3\int_0^\infty dp p^2 f\right\} = -3\int_0^\infty \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f \\ &= -3n. \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial (nv^i)}{\partial x^i} + 3\left(\frac{da/dt}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) n = 0.$$

De to første leddene kjenner vi igjen som kontinuitetsligningen fra hydrodynamikk. Det siste leddet skyldes, som vi ser, universets ekspansjon og perturbasjonene. Vi må nå finne ut hvordan denne ligningen ser ut til første orden i den perturberte fordelingen av mørk materie. Til nullte orden blir ligningen bare

$$\frac{\partial n^{(0)}}{\partial t} + 3\frac{da/dt}{a} n^{(0)} = 0,$$

som gir

$$n^{(0)} \propto a^{-3}$$

som løsning, akkurat som vi burde forvente. Til første orden kan vi skrive

$$n = n^{(0)}[1 + \delta(\vec{x}, t)],$$

og setter vi dette inn i ligningen finner vi

$$\frac{\partial}{\partial t}[n^{(0)}(1+\delta)] + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}(n^{(0)} v^i) + 3\frac{da/dt}{a} n(1+\delta) + 3\frac{\partial \Phi}{\partial t} n^{(0)} = 0,$$

som etter litt ommøblering gir

$$(1+\delta)\left[\frac{\partial n^{(0)}}{\partial t} + 3\frac{da/dt}{a} n^{(0)}\right] + n^{(0)}\frac{\partial \delta}{\partial t} + n^{(0)}\frac{1}{a}\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + 3n^{(0)}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Det første leddet i ligningen er lik null p.g.a. nullteordensligningen. Dermed sitter vi igjen med, etter å ha forkortet bort $n^{(0)}$:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + 3\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Vi ser at denne ligningen i tillegg til δ inneholder en ny ukjent: hastighetsfeltet for mørk-materiefluidet, v^i. Derfor trenger vi en ligning til. Det kan vi få ved å ta nok et moment av Boltzmannligningen. Vi ganger den med $p\hat{p}^j/E$ og integrerer over p:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f \frac{p\hat{p}^j}{E} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f \frac{p^2\hat{p}^i\hat{p}^j}{E^2} \\ &- \left[\frac{da/dt}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f}{\partial E}\frac{p^3\hat{p}^j}{E^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}\int \frac{d^3}{(2\pi)^3}\frac{\partial f}{\partial E}\frac{\hat{p}^i\hat{p}^j p^2}{E}. \end{aligned}$$

Det andre leddet på høyresiden kan vi neglisjere, siden det er av orden p^2/E^2. Det første leddet kjenner vi igjen som $\partial(nv^j)/\partial t$. Videre:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f}{\partial E}\frac{p^3\hat{p}^j}{E^2} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f}{\partial p}\frac{p^2\hat{p}^j}{E} \\ &= \int \frac{d\Omega\hat{p}^j}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dp \frac{p^4}{E}\frac{\partial f}{\partial p} \\ &= \int \frac{d\Omega\hat{p^j}}{(2\pi)^3}\left\{\left[\frac{p^4}{E}f\right]_0^\infty - \int_0^\infty dp f\left(\frac{4p^3}{E} - \frac{p^5}{E^3}\right)\right\} \\ &= -4\int \frac{d\Omega\hat{p}^j}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dp p^2 f\frac{p}{E} = -4\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f\frac{p\hat{p}^j}{E} \\ &= -4nv^j. \end{aligned}$$

Og:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f}{\partial E}\frac{\hat{p}^i\hat{p}^j}{E}p^2 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\partial f}{\partial p}p\hat{p}^i\hat{p}^j = \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\hat{p}^i\hat{p}^j \int_0^\infty dp\frac{\partial f}{\partial p}p^3 \\
&= \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\hat{p}^i\hat{p}^j \left\{ \left[p^3 f\right]_0^\infty - 3\int_0^\infty dpp^2 f \right\} \\
&= -3\int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3}\hat{p}^i\hat{p}^j \int_0^\infty dpp^2 f \\
&= -3\frac{1}{3}\delta^{ij}\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dpp^2 f \\
&= -\delta^{ij}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f = -\delta^{ij} n.
\end{aligned}$$

Dermed blir ligningen

$$\frac{\partial}{\partial t}(nv^j) - \left(\frac{da/dt}{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)(-4nv^j) - \frac{1}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i}(-\delta^{ij} n) = 0.$$

I det andre leddet kan vi neglisjere $\partial\Phi/\partial t$ fordi v allerede er av første orden. Vi ender da opp med

$$\frac{\partial}{\partial t}(nv^j) + 4\frac{da/dt}{a}nv^j + \frac{n}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0.$$

Siden alle leddene i ligningen allerede er av første orden, kan vi sette $n = n^{(0)} \propto a^{-3}$. Setter vi inn dette og ordner opp, så får vi

$$\frac{\partial v^j}{\partial t} + \frac{da/dt}{a}v^j + \frac{1}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0.$$

Minner om den første ligningen vi utledet:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + 3\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Vi ser nå at systemet er lukket med hensyn på δ og v. Den siste ligningen vi utledet inneholder ingen nye ukjente. Det skyldes ene og alene at partiklene vi ser på er ikke-relativistiske, slik at vi kan neglisjere ledd av orden p^2/E^2. Dette ville altså ikke ha funket med fotonene. At den mørke materien er ikke-relativistisk er altså grunnen til at vi kan behandle dem som et fluid. Vi introduserer konform tid igjen, og fouriertransformerer. Da blir ligningene slik:

$$\begin{aligned}
\dot{\delta} + ikv + 3\dot{\Phi} &= 0 \\
\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v + ik\Psi &= 0.
\end{aligned}$$

Vi har antatt at hastighetsfeltet er parallelt med k, $v^i = k^i v/k$, og vi har også droppet tilder over fouriertransformerte størrelser.

Baryoner

Halleluja! Baryonene (det vil si protonene og elektronene) er også ikke-relativistiske. Utregningen av df/dt blir derfor akkurat den samme som for CDM, så derfor slipper vi å gjøre dette igjen. Men, 'hver gledesstund du har på jord betales skal med sorg': protonene og elektronene vekselvirker med hverandre og med fotonene, slik at Boltzmannligningene for dem vil ha et kollisjonsledd. Elektronene er koblet til fotoner via Comptonspredning (protonene også, men fordi protonmassen er så mye større enn elektronmassen kan vi se bort ifra dette), og protonene og elektronene er koblet via Coulombspredning. På grunn av ladningsnøytralitet har vi $\delta_e = \delta_p \equiv \delta_b$. Coulombspredningen er dessuten så effektiv at protonene og elektronene oppfører seg som en væske med en felles hastighet, $\vec{v}_e = \vec{v}_p = \vec{v}_b$. Tar man det første momentet av Boltzmannligningen for elektroner, viser det seg at kollisjonsleddet forsvinner, siden dette momentet svarer til elektrontallet, som er en bevart størrelse i alle kollisjoner. Dermed blir den første ligningen nøyaktig den samme som for CDM:

$$\dot{\delta}_b + ikv_b + 3\dot{\Phi} = 0.$$

Det neste momentet gir oss mer trøbbel, og nå har jeg ærlig talt fått nok. Du får prøve å integrere kollisjonsleddet ditt sjøl. Eventuelt konsultere Dodelson. Det vi ender opp med her iallefall

$$\dot{v}_b + \frac{\dot{a}}{a}v_b + ik\Psi = \dot{\tau}\frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b}[3i\Theta_1 + v_b].$$

Her er

$$\Theta_1 \equiv i\int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2}\mu\Theta(\mu),$$

og mer generelt

$$\Theta_\ell \equiv \frac{1}{(-i)^\ell}\int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{2}P_\ell(\mu)\Theta(\mu),$$

der $P_\ell(\mu)$ er Legendrepolynomet av grad ℓ.