Kosmologisk perturbasjonsteori: forpostfektninger

I kapittel 4 i Dodelson starter han arbeidet med å sette opp ligningene som beskriver hvordan små inhomogeniteter i fordelingen av fotoner og materie utvikler seg i tiden. At fordelingen er inhomogen betyr at energi-impulstensoren $T^{\mu\nu}$ vil bli mer komplisert, og siden metrikken er relatert til energi-impulstensoren gjennom Einsteinligningene, betyr det at metrikken også vil avvike fra Robertson-Walkerformen.

Vi skal starte med å sette opp ligninger som beskriver hvordan inhomogeniteter i bidragene til energi-impulstensoren utvikler seg, gitt en inhomogen metrikk. Når vi kommer til kapittel 5 i Dodelson, skal vi se hvordan inhomogenitetene i metrikken vil utvikle seg i tiden. De tre viktigste komponentene vi skal se på er fotoner, baryoner (det vil si, i den svært misvisende terminologien brukt i kosmologi, protoner og elektroner), og mørk materie.

Hvordan skal vi sette opp ligningene for tetthetsperturbasjonene? I AST4220 tok vi utgangspunkt i ligningene som beskriver en newtonsk væske. Nå skal vi gå vekk fra denne forenklede beskrivelsen. Vi skal bruke generell relativitetsteori, og vi skal starte med Boltzmannligningen. Boltzmannligningen forteller oss om tidsutviklingen til den statistiske fordelingen av partikler i et mangepartikkelsystem og er *alltid* det korrekte utgangspunktet. I noen tilfeller kan man nøye seg med de laveste såkalte *momentene* av Boltzmannligningen, og da kommer vi over i en hydrodynamisk beskrivelse av systemet. Vi skal se at dette er tilfellet for baryoner og mørk materie.

Boltzmannligningen tar utgangspunkt i den såkalte *fordelingsfunksjonen*, $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ for systemet. Denne forteller hvor mange partikler som er i en posisjon rundt en gitt $\vec{r}$ med en hastighet nær en gitt $\vec{v}$ ved en gitt tid t. Boltzmannligningen sier at

$$\frac{df}{dt} = \text{kollisjonsledd}.$$

Vi skal se nærmere på hva dette betyr straks. Gangen i det som skjer i kapittel 4 er at venstresiden av denne ligningen skrives som

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i}\frac{d\hat{p}^i}{dt}.$$

Størrelsene dx^i/dt og dp/dt er gitt ved geodetligningene, og dermed kommer metrikken inn gjennom Christoffelsymbolene. Tålmodighetsprøven består i å regne ut disse leddene. I tillegg skal vi benytte oss av at perturbasjonene er små. Det betyr for eksempel at vi for fotonene kan skrive

$$f = f^0 + \delta f,$$

der f^0 er den uperturberte fordelingsfunksjonen og δf er perturbasjonen. Siden fotonene i det homogene tilfellet er et system av bosoner i termisk likevekt, er den uperturberte fordelingsfunksjonen gitt ved Bose-Einsteinfordelingen. At perturbasjonen δf er liten betyr at vi skal bare ta med ledd som er av første orden i δf eller lavere, og neglisjere alle ledd av høyere orden.

Kollisjonsleddet i fotonenes tilfelle kommer fra elastisk spredning av fotoner mot elektroner, såkalt Comptonspredning. Dette leddet kan regnes ut og uttrykkes ved δf.

Strategien for baryoner og mørk materie er den samme for fotonene, men her kan vi forenkle ting noe fordi disse komponentene er ikke-relativistiske. For den mørke materien har vi en ytterligere forenkling i at denne komponenten ikke vekselvirker direkte med noen av de andre komponentene, den er *kollisjonsløs*.

Noen småting: newtonsk grense, perturbert metrikk, konform tid

Vi så forrige gang at i den newtonske grensen er 00-komponenten av metrikken gitt ved gravitasjonspotensialet Ψ. I generell relativitetsteori kan vi skrive

$$ds^2 = -(1+2\Psi)dt^2 + (1-2\Psi)(dx^2+dy^2+dz^2),$$

En ting vi skal merke oss er at det for den newtonske grensen er revnende likegyldig hva som står foran den romlige delen av metrikken, det kunne like gjerne stått 1 og ikke $1-2\Psi$ foran denne delen. Den spesielle formen over er et resultat av Einsteins feltligninger.

Denne formen for metrikken gjør det klarere hvorfor Dodelson velger å skrive den perturberte metrikken i såkalt *konform newtonsk gauge*:

$$ds^2 = -(1+2\Psi)dt^2 + a^2(1+2\Phi)(dx^2+dy^2+dz^2).$$

For det første ser vi at for $\Psi = \Phi = 0$ får vi RW-metrikken. Dersom vi ser på universet over tidsintervaller som er korte sammenlignet med den karakteristiske ekspansjonstiden, kan vi regne a som konstant, og vi kan fjerne den ved å reskalere de romlige koordinatene. Da kan vi skrive

$$ds^2 = -(1+2\Psi)dt^2 + (1+2\Phi)(dx^2+dy^2+dz^2).$$

Vi skal senere se at vi har $\Phi = -\Psi$ dersom vi kan neglisjere det som på dårlig norsk kan kalles *anisotropisk stress*. Dermed har vi

$$ds^2 = -(1+2\Psi)dt^2 + (1-2\Psi)(dx^2+dy^2+dz^2),$$

samme form som den newtonske grensen. Poenget med å skrive det perturberte linjeelementet slik Dodelson gjør det er derfor at Ψ i en viss forstand kan tolkes som et newtonsk gravitasjonspotensial. Det kan hjelpe på den fysiske forståelsen av og til.

Konform tid innføres av og til som en alternativ tidsvariabel til den kosmiske tiden t for å forenkle ligningene. Den er gitt ved

$$\eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')},$$

eller på differensialform,

$$d\eta = \frac{dt}{a}.$$

Skalafaktoren a er en økende funksjon av tiden. Vi ser derfor at η, som t, er monotont økende, og kan derfor brukes som en alternativ tidsvariabel. For eksempel har vi i en Einstein-de Sittermodell at

$$\eta = \int_0^t \frac{dt'}{(t'/t_0)^{2/3}} = 3t_0^{2/3}t^{1/3}.$$

Vi kan da skrive skalafaktoren uttrykt ved η:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} = \frac{\eta^2}{9t_0^2}.$$

RW-linjelementet for et romlig flatt univers får en spesielt enkel form når vi bruker konform tid:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 d\vec{x}^2 = -a^2 d\eta^2 + a^2 d\vec{x}^2 = a^2(-d\eta^2 + d\vec{x}^2),$$

dvs. som Minkowskimetrikken multiplisert med en tidsavhengig skaleringsfaktor.

Den kollisjonsløse Boltzmannligningen

For å forenkle arbeidet skal vi i det følgende se på et klassisk, ikke-relativistisk mangepartikkelsystem. Vi skal blåse i kvantestatistikk, dvs. om partiklene er fermioner, som adlyder Pauliprinsippet, eller bosoner, som ikke gjør det.

Vi ser altså på et system av partikler, alle av samme type og med masse m. Selv om det i prinsippet er mulig, er det i praksis en håpløs oppgave å studere systemet ved å følge banen til hver enkelt partikkel i deltalj. Det er heller ikke særlig matnyttig med tanke på hvilke egenskaper ved systemet som er relevante for eksperimenter. I stedet er det mer fruktbart å forsøke å beregne de kollektive egenskapene til systemet. Den sentrale størrelsen for å bestemme disse er *fordelingsfunksjonen*, f, definert ved at

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3r d^3v$$

gir midlere antall partikler med posisjon i $[\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}]$ og hastighet i $[\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}]$ ved tiden t. Dersom vi kjenner fordelingsfunksjonen, kan vi regne ut middelverdier av fysiske parametre for systemet. For eksempel gir

$$n(\vec{r}, t) = \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

midlere antall partikler i posisjon $\vec{r}$ ved tid t, og

$$\langle \vec{v}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{n(\vec{r}, t)} \int d^3v f(\vec{r}, \vec{v}, t)\vec{v}$$

gir den midlere hastigheten til partikler i systemet.

Fra statistisk fysikk er du allerede kjent med fordelingsfunksjoner for systemer som er i termodynamisk likevekt. I slike tilfeller er fordelingsfunksjonen ikke eksplisitt avhengig av tiden, $\partial f/\partial t = 0$, og den kan skrives som en funksjon av energien alene. Men generelt kan vi ha ytre krefter og indre vekselvirkninger mellom partiklene i systemet som gjør at systemet ikke er i likevekt. For å bestemme fordelingsfunksjoenen for slike systemer trenger vi et mer generelt redskap enn termodynamikken, og Boltzmannligningen inneholder det vi trenger. Vi skal utlede denne først for tilfellet der partiklene i systemet ikke vekselvirker med hverandre, dvs. systemet er *kollisjonsløst*.

Vi konsentrerer oss om partikler som ved tid t er i faseromsvolumet d^3rd^3v rundt $(\vec{r}, \vec{v})$. Vi antar at partiklene beveger seg under innflytelse av en ytre kraft $\vec{F}(\vec{r}, t)$, slik at ved tiden $t' = t + dt$ vil være i et område $d^3r'd^3v'$ rundt $(\vec{r'}, \vec{v'})$, der

$$
\begin{aligned}
\vec{r'} &= \vec{r} + \dot{\vec{r}}dt = \vec{r} + \vec{v}dt, \\
\vec{v'} &= \vec{v} + \dot{\vec{v}}dt = \vec{v} + \frac{1}{m}\vec{F}dt,
\end{aligned}
$$

der vi i den siste overgangen har brukt Newtons 2. lov, $\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$. Antall partikler må være bevart i dette tidsrommet. Det betyr at

$$
f(\vec{r'}, \vec{v'}, t)d^3r'd^3v' = f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3rd^3v.
$$

Faseromsvolumelementene er relatert ved at

$$
d^3r'd^3v' = |J|d^3rd^v,
$$

der $|J|$ er absoluttverdien til Jacobideterminanten til transformasjonen mellom $\vec{r'}, \vec{v'}$ og $\vec{r}, \vec{v}$ over. Vi ser at

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} &= \delta_{ij}, \\
\frac{\partial x'^i}{\partial v^j} &= \delta_{ij}dt, \\
\frac{\partial v'^i}{\partial x^j} &= \frac{1}{m}\frac{\partial F^i}{\partial x^j}dt, \\
\frac{\partial v'^i}{\partial v^j} &= \delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

Det betyr at Jacobideterminanten blir

$$
J = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & dt & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt \\
\frac{1}{m}\frac{\partial F_x}{\partial x}dt & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}
$$

og ved å bruke kofaktorekspansjon av determinanten ser vi at den blir

$$J = 1 + \mathcal{O}(dt^2).$$

Det vil si at til første orden i dt er Jacobideterminanten lik 1, og vi har derfor

$$d^3r'd^3v' = d^3rd^3v,$$

slik at bevaring av partikler ganske enkelt betyr at

$$f(\vec{r'}, \vec{v'}, t') = f(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

Setter vi inn for $\vec{r'}$ og $\vec{v'}$ får vi

$$f(\vec{r} + \dot{\vec{r}}dt, \vec{v} + \dot{\vec{v}}dt, t + dt) - f(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0,$$

og Taylorutvikler vi til 1. orden, får vi

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}dt + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}dt + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}dt + \frac{\partial f}{\partial v_x}\dot{v_x}dt + \frac{\partial f}{\partial v_y}\dot{v_y}dt + \frac{\partial f}{\partial v_z}\dot{v_z}dt - f(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0,$$

og dette kan vi skrive som

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\dot{x^i} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial v^i}\dot{v^i} = 0,$$

eller i en mer kompakt notasjon

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0.$$

Et eksempel: vi ser på frie partikler i én dimensjon. Siden de er frie, har vi at

$$\dot{v} = \ddot{x} = 0.$$

Energien til hver partikkel er $E = mv^2/2 = m\dot{x}^2/2$. Når systemet er i likevekt har vi at $\partial f/\partial t = 0$. Da gir Boltzmannligningen

$$0 + \dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

det vil si

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Vi ser at $f = f(E)$ er en løsning, siden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dE}\frac{dE}{dx} = 0.$$

Et eksempel på en slik fordeling er Maxwell-Boltzmannfordelingen $f(E) = \exp(-E/k_\mathrm{B}T)$.

Topartikkelkollisjoner og spredningstverrsnitt

Vi har nå utledet den kollisjonsløse Boltzmannligningen. I de fleste systemer vil det imidlertid være slik at partiklene vekselvirker med hverandre. Dersom systemet er tynt nok, vil de dominerende prosessene være de hvor to og to partikler vekselvirker med hverandre. Dette kaller vi med et oppfinnsomt navn for topartikkelkollisjoner, eller topartikkelspredning. Før vi kan sette opp Boltzmannligningen med kollisjoner, må vi innføre noen begreper og egenskaper ved topartikkelkollisjoner. Vi holder oss til det klassiske og ikkerelativistiske tilfellet.

La oss se på to partikler med posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ og hastigheter $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Den totale bevegelsesmengden,

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

er en bevart størrelse. Dersom vi innfører partiklenes relative hastighet $\vec{V} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, kan vi skrive

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\vec{v}_1 &= \vec{P} + m_2\vec{V}, \\ (m_1 + m_2)\vec{v}_2 &= \vec{P} - m_1\vec{V}, \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{c} + \frac{\mu}{m_1}\vec{V}, \\ \vec{v}_2 &= \vec{c} - \frac{\mu}{m_2}\vec{V}, \end{aligned}$$

der

$$\vec{c} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \text{konstant},$$

med

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

(massesenterets koordinatvektor) og

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

(den reduserte massen). Den totale kinetiske energien til de to partiklene kan skrives

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{c}^2 + \frac{1}{2}\mu\vec{V}^2.$$

I en kollisjon endres partiklenes hastigheter $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ til $(\vec{v}_1', \vec{v}_2')$, men $\vec{c}$ er bevart siden $\vec{P}$ er bevart. Hvis vi i tillegg begrenser oss til *elastiske* kollisjoner, vet vi at K også er bevart, og da ser vi av uttrykket for K at $|\vec{V}|$ er bevart, slik at $|\vec{V}'| = |\vec{V}|$. Det vil si at alt som skjer i kollisjonen er at $\vec{|V|}$ endrer retning, slik at to vinkler er nok til å karakterisere spredningsprosessen.

I en statistisk beskrivelse av spredningsprosesser er det *spredningstverrsnittet* σ' som er den sentrale størrelsen. Det skrives $\sigma'(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \to \vec{v}_1', \vec{v}_2')d^3v_1'd^3v_2'$ og måler *antall partikler per tidsenhet, per enhet av fluks av partikler av type 1 som kommer inn med relativ hastighet* $\vec{V}$ *mot partikler av type 2, som kommer ut etter spredning med hastigheter mellom henholdsvis* $\vec{v}'_1$ *og* $\vec{v}' + d\vec{v}'_1$*, og* $\vec{v}'_2$ *og* $\vec{v}' + d\vec{v}'_2$*.* Vi har at

$$\begin{aligned}\vec{v}'_1 &= \vec{c}' + \frac{\mu}{m_1}\vec{V}' \\ \vec{v}'_2 &= \vec{c}' - \frac{\mu}{m_2}\vec{V}',\end{aligned}$$

der $\vec{c}' = \vec{c}$ og $|\vec{V}'| = |\vec{V}|$, slik at $\sigma' = 0$ dersom ikke disse betingelsene er oppfylt. Vi kan gi en effektiv enlegemebeskrivelse av det som skjer via tverrsnittet $\sigma(\vec{V}')d\Omega'$, definert som *antall partikler per tidsenhet, per enhet av fluks av partikler av type 1 som kommer inn med relativ hastighet* $\vec{V}$ *mot partikler av type, som kommer ut etter spredning med relativ hastighet* $\vec{V}'$ *med retning i et romvinkelområde* $d\Omega'$ *rundt vinklene* θ' *og* ϕ'*.* Den formelle sammenhengen mellom de to tverrsnittene er

$$\sigma(\vec{V}')d\Omega' = \int_{\vec{c}'}\int_{\vec{V}'} \sigma'(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \to \vec{v}'_1, \vec{v}'_2) d^3v'_1 d^3v'_2,$$

der integralet egentlig er trivelt siden $\sigma' = 0$ for $\vec{c}' \neq \vec{c}$, og $|\vec{V}'| \neq |\vec{V}|$. Det er mulig å vise at $d^3v'_1 d^3v'_2 = d^3v_1 d^3v_2$.

Spredningstverrsnittet kan ha symmetrier på grunn av symmetrier i vekselvirkningene som styrer kollisjonsprosessene. Dersom prosessene skjer via elektromagnetiske vekselvirkninger (som er det tilfellet vi skal holde oss til), vet vi at de underliggende ligningene er invariante under tidsreversjon, $t \to -t$ og under paritetsinversjon, $\vec{r} \to -\vec{r}$. Det første betyr at sannsynligheten for en prosess der to partikler med hastigheter $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ kommer inn og to partikler med hastigheter $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$ kommer ut, må være den samme som for at to partikler med hastigheter $-\vec{v}'_1, -\vec{v}'_2$ skal komme inn og to partikler med hastigheter $-\vec{v}_1, -\vec{v}_2$ skal komme ut. Mer formelt:

$$\sigma'(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \to \vec{v}'_1, \vec{v}'_2) = \sigma'(-\vec{v}'_1, -\vec{v}'_2 \to -\vec{v}_1, -\vec{v}_2).$$

Paritetssymmetrien innebærer tilsvarende at

$$\sigma'(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \to \vec{v}'_1, \vec{v}'_2) = \sigma'(-\vec{v}_1, -\vec{v}_2 \to -\vec{v}'_1, -\vec{v}'_2).$$

Dersom begge disse betingelsene er oppfylt samtidig, kan vi kombinere dem og finne at

$$\sigma'(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \to \vec{v}'_1, \vec{v}'_2) = \sigma'(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2 \to \vec{v}_1, \vec{v}_2),$$

det vil si at prosessen går like effektivt begge veier.

Boltzmannligningen med kollisjonsledd

Boltzmannligningen med kollisjonsledd kan skjematisk skrives som

$$\frac{df}{dt} = C[f],$$

der $C[f]$ er det såkalte kollisjonsleddet. Det måler raten partikler forlater faseromselementet d^3rd^3v med på grunn av kollisjoner mellom partikler i systemet. Merk at venstresiden i ligningen er den samme som i det kollisjonsløse tilfellet. Ligningen sier altså ganske enkelt at endringen i antall partikler i et faseromselement skyldes partikler som driver inn eller ut av elementet på grunn av kinematikken og ytre krefter, og partikler som blir spredt ut av faseromselementet på grunn av kollisjoner med andre partikler i systemet. Vi må bestemme den konkrete formen på $C[f]$, og vi vil anta at

- Bare topartikkelkollisjoner er viktige.
- σ' er ikke påvirket av eventuelle ytre krefter $\vec{F}$.
- Fordelingsfunksjonen f varierer langsomt over det effektive kollisjonsområdet og varigheten av kollisjonen.
- Hastigheten som $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ som partiklene kommer inn i kollisjonen med er fullstendig ukorrelerte.

Partikler kan bli spredt inn eller ut av faseromselementet d^3rd^3v i løpet av tiden dt. Vi kan derfor dele opp C i to biter

$$C[f] = -C^-[f] + C^+[f].$$

La oss se på volumelementet d^3r med partikler med hastighet nær $\vec{v}$, og la oss kalle dette for partikler av type A. Disse partiklene kan bli spredt ut av dette hastighetsområdet av andre partikler, la oss kalle dem partikler av type A_1 i det samme volumelementet d^3r med hastigheter $\vec{v}_1$. Spredningen er beskrevet av tverrsnittet

$$\sigma'(\vec{v}, \vec{v}_1 \to \vec{v}', \vec{v}_1')d^3v'd^3v_1'.$$

Antall partikler som blir spredt ut av faseromselementet får vi ved å ta dette tverrsnittet, multiplisere med antall A_1-molekyler som kan stå for spredningen, $f(\vec{r}, \vec{v}_1, t)d^3d^3v_1$, multiplisere med den relative fluksen av A-type partikler inn mot A_1-type partikler, $|\vec{v} - \vec{v}_1|f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3v$, og summere (dvs. integrere) over alle verdier av $\vec{v}_1'$, $\vec{v}'$ og $\vec{v}$:

$$C^-[f]d^3rd^3vd^3t = \int_{\vec{v}_1'}\int_{\vec{v}'}\int_{\vec{v}_1}[|\vec{v}-\vec{v}_1|f(\vec{r}, \vec{v}, t)d^3v][f(\vec{r}, \vec{v}_1, t)d^3rd^3v_1][\sigma'(\vec{v}, \vec{v}_1' \to \vec{v}', \vec{v}_1')d^3v'd^3v_1'].$$

For å finne $C^+[f]$ er vi ute etter alle partikler i d^3r med vilkårlige initialhastigheter $\vec{v}'$ og $\vec{v}_1'$ som er slik at etter kollisjonen har én partikkel hastighet i $[\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}]$, mens den andre har hastighet i $[\vec{v}_1, \vec{v}_1 + d\vec{v}_1]$. Det relevante spredningstverrsnittet er $\sigma'(\vec{v}', \vec{v}_1' \to \vec{v}, \vec{v}_1)$, og etter samme logikk som vi brukte til å sette opp $C^-[f]$ får vi

$$C^+[f]d^3rd^3vdt = \int_{\vec{v}_1}\int_{\vec{v}_1'}\int_{\vec{v}'}[|\vec{v}'-\vec{v}_1|f(\vec{r}, \vec{v}', t)d^3v'][f(\vec{r}, \vec{v}_1', t)d^3rd^3v_1'][\sigma(\vec{v}', \vec{v}_1' \to \vec{v}, \vec{v}_1)d^3vd^3v_1].$$

Legg merke til at

$$\begin{aligned}
\sigma'(\vec{v}', \vec{v}_1' \to \vec{v}, \vec{v}_1) &= \sigma'(\vec{v}, \vec{v}_1 \to \vec{v}', \vec{v}_1') \\
\vec{V} &= \vec{v} - \vec{v}_1 \\
\vec{V}' &= \vec{v}' - \vec{v}_1',
\end{aligned}$$

der vi på grunn av antagelsen om elastiske kollisjoner har $|\vec{V}| = |\vec{V}'| \equiv V$. Vi innfører notasjonen

$$\begin{aligned}
f &\equiv f(\vec{r}, \vec{v}, t) \\
f' &\equiv f(\vec{r}, \vec{v}', t) \\
f_1 &\equiv f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) \\
f_1' &\equiv f(\vec{r}.\vec{v}_1', t),
\end{aligned}$$

og da kan det totale kollisjonsleddet skrives som

$$\begin{aligned}
C[f] &= \int_{\vec{v}_1} \int_{\vec{v}_1'} \int_{\vec{v}'} (f' f_1' - f f_1) V \sigma'(\vec{v}, \vec{v}_1 \to \vec{v}', \vec{v}_1') d^3 v_1 d^3 v' d^3 v_1' \\
&= \int_{\vec{v}_1} \int_{\Omega'} (f' f_1' - f f_1) V \sigma(\vec{V}') d\Omega' d^3 v_1.
\end{aligned}$$

Dermed kan den fullstendige Boltzmannligningen med topartikkelkollisjoner skrives som

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \int_{\vec{v}_1} \int_{\Omega'} (f' f_1' - f f_1) V \sigma d\Omega' d^3 v_1.$$

Vi ser at dette er en komplisert ligning: både deriverte av f og integraler som avhenger av f inngår. Dette kalles en integro-differensialligning, og de er i allminnelighet ikke lette å løse. Som regel må man ty til tilnærminger, og det er det vi skal gjøre.

Tidsvariasjon av middelverdier og overgang til fluidmekanikk

La $\chi(\vec{r}, \vec{v}, t)$ være en eller annen fysisk størrelse assosiert med en partikkel. Da er dens middelverdi definert ved

$$\langle \chi(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{n(\vec{r}, t)} \int d^3 v f(\vec{r}, \vec{v}, t) \chi(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

Vi er interesserte (vel, jeg er iallefall interessert) i å finne en ligning som beskriver hvordan denne middelverdien endrer seg med tiden. Man kan vise at

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle n\chi \rangle = n \langle D\chi \rangle - \frac{\partial}{\partial x^i} \langle n v^i \chi \rangle + \mathcal{C}(\chi),$$

der

$$D\chi = \frac{\partial \chi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{v}} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \vec{v}},$$

$$\mathcal{C}(\chi) = \frac{1}{2}\int\int\int d^3v d^3v_1 d\Omega' f f_1 V \sigma \Delta\chi,$$

og

$$\Delta\chi = \chi(\vec{r},\vec{v}',t) + \chi(\vec{r},\vec{v}_1',t) - \chi(\vec{r},\vec{v},t) - \chi(\vec{r},\vec{v}_1,t) \equiv \chi' + \chi_1' - \chi - \chi_1.$$

Merk at $\langle \ldots \rangle$ betyr midling over hastighet, og det betyr at $n = n(\vec{r},t)$ kan tas utenfor, f.eks. $\langle n\chi\rangle = n\langle\chi\rangle$, siden n er uavhengig av $\vec{v}$. Beviset for denne ligningen tar utgangspunkt i Boltzmannligningen:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{v}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = C[f].$$

Vi multipliserer ligningen med χ og integrerer over $\vec{v}$:

$$\int d^3v\frac{\partial f}{\partial t}\chi + \int d^3v\vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\chi + \int d^3v\dot{\vec{v}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\chi = \int d^3v C[f]\chi.$$

Så omformer vi integralene, og husker på at $\vec{r}$, $\vec{v}$ og t skal oppfattes som uavhengige variable. Det første integralet kan skrives som

$$\begin{aligned}\int d^3v\frac{\partial f}{\partial t}\chi &= \int d^3v\left[\frac{\partial}{\partial t}(f\chi) - f\frac{\partial\chi}{\partial t}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int d^3v f\chi - \int d^3v f\frac{\partial\chi}{\partial t},\end{aligned}$$

dvs.

$$\int d^3v\frac{\partial f}{\partial t}\chi = \frac{\partial}{\partial t}\left(n\langle\chi\rangle\right) - n\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial t}\right\rangle.$$

Neste integral:

$$\begin{aligned}\int d^3v\vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\chi &= \int d^3v v^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\chi \\ &= \int d^3v\left[\frac{\partial}{\partial x^i}(v^i f\chi) - v^i f\frac{\partial\chi}{\partial x^i}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}\int d^3v f v^i\chi - \int d^3v f v^i\frac{\partial\chi}{\partial x^i},\end{aligned}$$

dvs.

$$\int d^3v\vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\chi = \frac{\partial}{\partial x^i}(n\langle v^i\chi\rangle) - n\left\langle v^i\frac{\partial\chi}{\partial x^i}\right\rangle.$$

Videre:

$$\begin{aligned}\int d^3v\dot{\vec{v}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\chi &= \int d^3v\frac{\vec{F}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\chi = \int d^3v\frac{F^i}{m}\frac{\partial f}{\partial v^i}\chi \\ &= \int d^3v\left[\frac{\partial}{\partial v^i}\left(\frac{F^i}{m}f\chi\right) - \frac{F^i}{m}f\frac{\partial\chi}{\partial v^i}\right] \\ &= \left[\frac{F^i}{m}f\chi\right]_{v^i=-\infty}^{v^i=+\infty} - \int d^3v\frac{F^i}{m}f\frac{\partial\chi}{\partial v^i} \\ &= -\frac{F^i}{m}n\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial v^i},\right\rangle\end{aligned}$$

der den siste overgangen følger av at $f = 0$ for $|\vec{v}| \to \infty$ (ingen partikler med uendelig høy hastighet!) Samler vi sammen bitene, ser vi at vi får ligningen

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\langle\chi\rangle) - n\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial t}\right\rangle + \frac{\partial}{\partial x^i}(n\langle v^i\chi\rangle) - n\left\langle v^i\frac{\partial\chi}{\partial x^i}\right\rangle - \frac{F^i}{m}n\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial v^i}\right\rangle = \mathcal{C}(\chi).$$

Vi har at

$$-n\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial t}\right\rangle - n\left\langle v^i\frac{\partial\chi}{\partial x^i}\right\rangle - \frac{F^i}{m}n\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial v^i}\right\rangle = -n\left\langle\frac{\partial\chi}{\partial t} + v^i\frac{\partial\chi}{\partial x^i} + \dot{v}^i\frac{\partial\chi}{\partial v^i}\right\rangle = -n\langle D\chi\rangle,$$

så

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\langle\chi\rangle) + \frac{\partial}{\partial x^i}(n\langle v^i\chi\rangle) - n\langle D\chi\rangle = \mathcal{C}(\chi).$$

Vi ser så på kollisjonsleddet,

$$\mathcal{C}(\chi) = \int\int\int\int d^3v d^3v_1 d^3v' d^3v_1' (f'f_1' - ff_1)V\sigma'(\vec{v},\vec{v}_1 \to \vec{v'},\vec{v'}_1)\chi(\vec{r},\vec{v},t).$$

P.g.a. symmetriene til σ kan vi bytte om $\vec{v}$ og $\vec{v}_1$, $\vec{v'}$ og $\vec{v'}_1$:

$$\mathcal{C}(\chi) = \int\int\int\int d^3v d^3v_1 d^3v' d^3v_1' (f'f_1' - ff_1)V\sigma'\chi(\vec{r},\vec{v}_1,t).$$

Vi adderer disse to uttrykkene og deler på 2:

$$\mathcal{C}(\chi) = \frac{1}{2}\int\int\int\int d^3v d^3v_1 d^3v' d^3v_1' (f'f_1' - ff_1)V\sigma'[\chi + \chi_1].$$

Deretter kan vi utnytte ytterligere symmetrier til å bytte om $\vec{v}$, $\vec{v'}$ og $\vec{v}_1$, $\vec{v'}_1$:

$$\int\int\int\int d^3v d^3v_1 d^3v' d^3v_1' f'f_1 V\sigma'[\chi+\chi_1] = \int\int\int\int d^3v d^3v_1 d^3v' d^3v_1' ff_1 V\sigma'[\chi'+\chi_1'].$$

Til slutt finner vi da at vi kan skrive kollisjonsleddet som

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\chi) &= \frac{1}{2}\int\int\int\int d^3v d^3v_1 d^3v' d^3v_1' ff_1 V\sigma'\Delta\chi \\ &= \frac{1}{2}\int\int\int d^3v d^3v_1 d\Omega' ff_1 V\sigma\Delta\chi,\end{aligned}$$

der $\Delta\chi = \chi' + \chi_1' - \chi - \chi_1$. Dermed er ligningen for tidsutviklingen av middelverdien til χ bevist.

Dersom χ er en størrelse som er bevart i kollisjoner mellom partikler, har vi at $\Delta\chi = 0$, og dermed $\mathcal{C}(\chi) = 0$. Da får vi at

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n\chi\rangle + \frac{\partial}{\partial x^i}\langle nv^i\chi\rangle = n\langle D\chi\rangle.$$

Eksempler på slike størrelser er:

- Bevaring av masse: $\chi = m$.
- Bevaring av bevegelsesmengde: $\chi = mv^i$, $i = 1, 2, 3$.
- Bevaring av energi: $\chi = \frac{1}{2}mv^2$.

La oss se på bevaring av masse først. Siden m ikke avhenger av posisjoner, hastigheter eller tid, har vi at $D\chi = Dm = 0$, og ligningen blir

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle nm\rangle + \frac{\partial}{\partial x^i}\langle nmv^i\rangle = 0.$$

Vi definerer $\vec{u} = \langle\vec{v}\rangle$ og massetettheten $\rho(\vec{r}, t) = mn(\vec{r}, t)$, og ser da at ligningen kan skrives som

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho u^i) = 0,$$

eller på vektorform

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0,$$

som vi kjenner igjen som kontinuitetsligningen. Vi har dermed utledet denne som en konsekvens av Boltzmannligningen og bevaring av masse i kollisjoner mellom partikler.

For beveglesesmengde, $\chi = mv^i$, finner vi

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle nmv^i\rangle + \frac{\partial}{\partial x^j}\langle nmv^iv^j\rangle = n\langle mDv^i\rangle,$$

og

$$Dv^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{F^k}{m}\frac{\partial v^i}{\partial v^k} = \frac{F^k}{m}\delta_{ik} = \frac{F^i}{m}.$$

Dermed kan vi skrive ligningen som

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho\langle v^iv^j\rangle) = \rho F'^i,$$

der $F'^i = F^i/m$. Vi skriver så $\vec{v} = \vec{u} + \vec{U}$, der $\vec{u}$ er den midlere hastigheten, slik at

$$\begin{aligned}\langle v^iv^j\rangle &= \langle(u^i + U^i)(u^j + U^j)\rangle\\ &= \langle u^iu^j + U^iU^j + u^iU^j + u^jU^i\rangle\\ &= u^iu^j + \langle U^iU^j\rangle\end{aligned}$$

siden $\langle u^iU^j\rangle = u^i\langle U^j\rangle = 0$. Vi definerer en 'trykktensor' P^{ij} ved

$$P^{ij} = \rho\langle U^iU^j\rangle,$$

som er symmetrisk, $P^{ji} = P^{ij}$ (merk at dette er ikke en tensor i GR-forstand, vi holder oss fremdeles til klassisk, ikke-relativistisk mekanikk). Med denne kan vi skrive ligningen som

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho u^iu^j) = -\frac{\partial}{\partial x^j}P^{ij} + \rho F'^i,$$

som er en variant av Eulerligningen fra fluidmekanikken. Den blir kanskje mer gjenkjennelig dersom vi skriver om venstresiden. Det første leddet kan skrives som

$$u^i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u^i}{\partial t},$$

og det andre leddet som

$$u^i \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho u^j) + \rho u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j},$$

og summen av de to leddene kan dermed skrives som

$$u^i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho u^j) \right] + \rho \left[\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right] = 0 + \rho \frac{du^i}{dt}.$$

Der $d/dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla$, og vi har brukt kontinuitetsligningen. Dermed kan Eulerligningen skrives som

$$\rho \frac{du^i}{dt} = -\frac{\partial P^{ij}}{\partial x^j} + \rho F'^i,$$

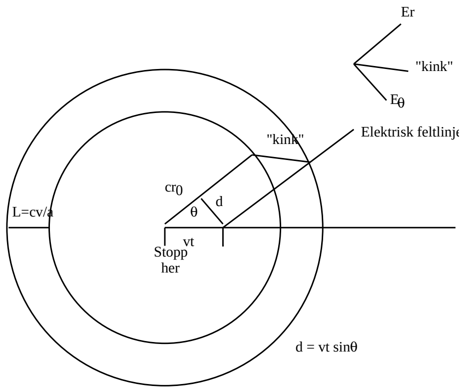
som vi dermed ser uttrykker Newtons 2. lov for et væskeelement: akselerasjonen til et væskeelement kommer dels fra ytre krefter (F'), delvs fra indre trykkgradienter. Merk at vi må kjenne fordelingsfunksjonen f for å kunne regne ut P^{ij}.

Thomsontverrsnittet: spredning av fotoner mot frie elektroner

Når vi skal sette opp Boltzmannligningen for fotoner, må vi også regne ut kollisjonsleddet. Fotoner vekselvirker ikke med hverandre, men de vekselvirker med frie elektroner og protoner som finnes i universet. Fra fotonenes synspunkt er den eneste forskjellen mellom elektroner og protoner, iallefall som en første tilnærming, at elektronet har mye lavere hvilemasse en protonet. Vi trenger spredningstverrsnittet for elastisk spredning av fotoner mot elektroner. Dette kalles Comptonspredning, og du har antageligvis regnet på kinematikken i denne prosessen den gangen du tok ditt første kurs i kvantefysikk. For å kunne beregne dette spredningstverrsnittet trengs det kraftigere verktøy i form av kvantefeltteori. I grensen der elektronene er ikke-relativistiske viser det seg imidlertid at spredningstverrsnittet ikke inneholder noen $\hbar$, og det gir oss mistanke om at det kan regnes ut når vi kun er bevæpnet med klassisk elektromagnetisme. Det stemmer, og i denne grensen kalles prosessen Thomsonspredning. Jeg skal gi en forenklet utledning av spredningstverrsnittet i denne grensen.

I klassisk elektromagnetisme er prosessen vi skal se på at en elektromagnetisk bølge kommer inn mot et elektron i ro. Bølgen setter opp E- og B-felter som stter elektronet i bevegelse. Siden bølgen er periodisk, vil vi forvente at elektronets bevegelse også er det, og at det dermed er akselerert. Men vi vet at en akselerert ladning sender ut elektromagnetiske bølger, så nettoresultatet er at den innkommende bølgen blir spredt mot elektronet. For å kunne regne på denne prosessen trenger vi derfor å vite hvordan strålingsfeltet fra en akselerert ladning ser ut. Det kan man finne ut rigorøst ved å starte med Maxwells ligninger, men vi skal se på en utledning som er litt løsere i snippen.

Figuren viser en ladd partikkel som kommer inn fra høyre med hastighet v og stoppes i løpet av en tid t_s bestemt av deselerasjonen a: $v - at_s = 0 \Rightarrow t_s = v/a$. Vi ser på feltet ved et tidspunkt $t \gg v/a$. Ved store avstander, $r \gg ct$ er E-



feltet det samme som fra en ladning i bevegelse, dvs. feltlinjene peker mot det punktet ladningen ville ha vært i dersom den ikke stoppet. Ved små avstander $r \ll ct$ er feltet som for en stasjonær ladning. Derfor er det 'kinks' i feltet i en avstand $r_0 = ct$ fra ladningen. Disse beveger seg utover med en hastighet c. Nær denne 'kinken' har vi at

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{vt \sin\theta}{cv/a} = \frac{at}{c} \sin\theta.$$

Siden vi fra Coulombs lov har at

$$E_r = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_0^2},$$

finner vi at

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{at}{c} \sin\theta E_r = \frac{at}{c} \sin\theta \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \\ &= \frac{ar_0}{c^2} \sin\theta \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = \frac{ea}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_0} \sin\theta. \end{aligned}$$

Siden E varierer med tiden, vil det via Maxwells ligninger bli generert et B-felt med samme amplitude. Eneregitettheten får like bidrag fra E- og B-feltet, slik at den er gitt ved $u = \epsilon_0 E_0^2$, der E_0 er amplituden til E-feltet. Den totale endringen i energien i et romvinkelelement $d\Omega$ som inneholder 'kinken' er dermed gitt ved

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{cv}{a} d\Omega r_0^2 \epsilon_0 E_\theta^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{cv}{a} d\Omega r_0^2 \epsilon_0 \frac{e^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 r_0^2} \sin^2\theta \\
&= d\Omega \frac{v}{a} \frac{e^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2\theta,
\end{aligned}
$$

og den utstrålte effekten per romvinkelenhet blir

$$
\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{(v/a)d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2\theta.
$$

Vi går så tilbake til problemet vårt: en EM-bølge som spres mot et elektron med ladning $q = -e$. For å gjøre problemet enklere, antar vi at den elektromagnetiske bølgen er monokromatisk og lineært polarisert. Det betyr at E-feltet assosiert med den kan skrives som

$$
\vec{E} = \vec{\epsilon} E_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)],
$$

der polarisasjonsvektoren $\vec{\epsilon}$ oppfyller $\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$ (elektromagnetiske bølger er transverse, dvs. feltene ligger i et plan som er normalt på bølgens utbredelsesretning $\vec{k}$). Elektronet ligger til å begynne med i ro i origo. Som et resultat av bølgens påvirkning vil den begynne å oscillere om origo. Siden vi ser på et ikke-relativistisk elektron, er dets hastighet $v \ll c$, og derfor kan vi neglisjere magnetfeltets innvirkning. Dette fordi Lorentzkraften er $\sim qvB_0$, og amplituden B_0 oppfyller $B_0 = E_0/c$. Sammenlignet med den elektriske kraften qE_0 er derfor Lorentzkraften undertrykt med en faktor $v/c \ll 1$. Kaller vi elektronets posisjon i forhold til origo for $\vec{s}$ har vi at

$$
\vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E} = m\ddot{\vec{s}}.
$$

Elektronet vil sende ut elektromagnetisk stråling med en effekt pr. romvinkelelement gitt ved

$$
\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 \langle \ddot{\vec{s}}^2 \rangle}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2\theta.
$$

Men

$$
\langle \ddot{\vec{s}}^2 \rangle = \frac{e^2}{m^2} \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{e^2 E_0^2}{2m^2},
$$

siden $\langle \vec{E}^2 \rangle = E_0^2/2$ for en monokromatisk bølge. Det gir

$$
\begin{aligned}
\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{e^2 E_0^2}{2m^2} \sin^2\theta \\
&= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

Den tidsmidlede Poyntingfluksen fra den innkommende bølgen er

$$
\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2.
$$

Spredningstverrsnittet kan i klassisk fysikk uttrykkes som det ekvivalente areal av den innkommende bølgefronten som svarer til samme effekt som den elektronet utstråler. Dermed: σ = Total utstrålt effekt $/\langle u\rangle$, og det differensielle spredningstverrsnittet blir dermed

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{dP/d\Omega}{\langle u\rangle} \\
&= \frac{2}{\epsilon_0 c E_0^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}\sin^2\theta \\
&= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0^2 mc^2}\right)^2 \sin^2\theta.
\end{aligned}$$

Det totale spredningstverrsnittet blir dermed

$$\sigma = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2.$$

Uttrykket i parentesen kalles for *den klassiske elektronradien* og vi kan derfor skrive Thomsonstverrsnittet kompakt som

$$\sigma \equiv \sigma_{\mathrm{T}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.65 \times 10^{-29}\ \mathrm{m}^2.$$

For spredning mot protoner blir regningen helt tilsvarende, den eneste forskjellen er at elektronmassen byttes ut med protonmassen. Siden sluttresultatet går som $1/m^2$, og protonmassen er nesten 2000 ganger større enn elektronmassen, ser vi at spredning av fotoner på elektroner er mye viktigere enn på protoner.